

Chapitre 8

Fonctions d'une variable réelle

8.1 Fonctions usuelles

8.1.1 Fonctions affines

I étant un intervalle de \mathbb{R} , a et b deux nombres réels, la fonction :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

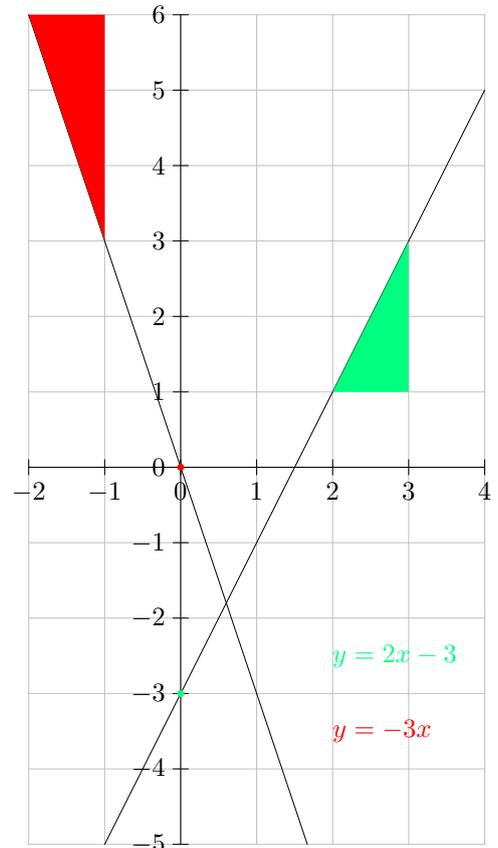
est appelée fonction affine. Si $b = 0$, la fonction est dite *linéaire*.

Exemple 1 . Soit la fonction affine définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x - 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Exemple 2 . Soit la fonction linéaire définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -3x$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	6	3	0	-3	-6	-9	-12



La courbe représentative d'une fonction affine est une droite d . On dit que l'équation réduite de d est : $y = ax + b$.

Vocabulaire : a s'appelle le *coefficient directeur* de la droite et b est son *ordonnée à l'origine*.

Remarque : la courbe d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Variations

Si $a > 0$ la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante.

Si $a < 0$ la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante.

Détermination d'une fonction affine

• Par le calcul

Deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'une droite étant connus, il faut savoir trouver la fonction affine représentée par la droite (AB) .

On résout ceci en quatre étapes : déterminons la fonction affine f telle que $f(-4) = 2$ et $f(3) = -1$.

1. L'expression de f est de la forme $f(x) = ax + b$.
2. a se calcule par

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{3 - (-4)} = \frac{-3}{7}$$

3. Pour trouver b , on écrit que $f(x_A) = y_A$:

$$2 = \frac{-3}{7} \times (-4) + b$$

$$\text{d'où } b = 2 - \frac{-3}{7} \times (-4) = \frac{2}{7}$$

4. f est donc définie par

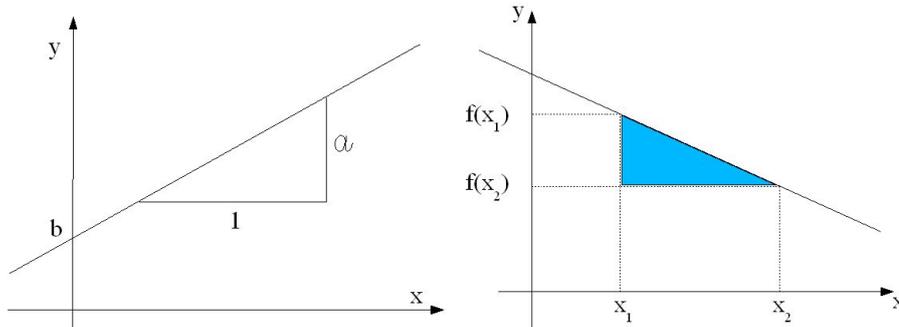
$$f(x) = \frac{-3}{7}x + \frac{2}{7}$$

• Par lecture graphique

Une droite étant tracée dans un repère du plan, il faut savoir trouver la fonction affine correspondante.

L'expression de la fonction affine étant $f(x) = ax + b$, on a immédiatement : $f(0) = a \times 0 + b = b$. Donc sur le graphique, b est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.

On sait que $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ pour tous les nombres distincts x_1 et x_2 . On choisit souvent $x_1 - x_2 = 1$. Ainsi a est le côté vertical du triangle :



- En cas de détresse, utiliser la calculatrice : entrer les deux abscisses dans une liste, les deux ordonnées dans une autre ; le menu « régression linéaire » donne l'équation de la droite.

Signe de $ax + b$

Si $a \neq 0$, $ax + b$ change une fois de signe : deux cas se présentent.

1. Si $a > 0$

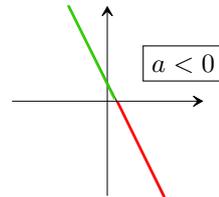
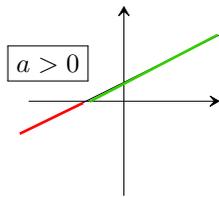
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	
	-		+

2. Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	
	+		-

On trouve $-\frac{b}{a}$ en résolvant $ax + b = 0$ qui équivaut à $ax = -b$ et à $x = -\frac{b}{a}$.

Si $a > 0$, on a déjà prouvé que la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est croissante ; comme elle vaut 0 en $x = -\frac{b}{a}$, elle est négative avant et positive après.



Exemple : $f(x) = 2x - 1$ est négatif pour x dans $]-\infty; 0,5]$ et positif pour x dans $[0,5; +\infty[$.

On présente souvent ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
$f(x)$		-	+

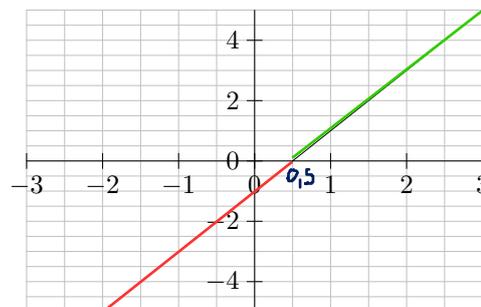
Bien sûr, « $f(x)$ est de signe plus » se dit aussi : « $f(x) > 0$ » ou encore « $f(x)$ est positif ».

Pour le retrouver, on résout $2x - 1 = 0$ puis :

- soit on voit dans sa tête une fonction affine croissante, qui prend d'abord des valeurs négatives, puis des valeurs positives.
- soit on résout par exemple $2x - 1 > 0$; la solution est $x > 0,5$.

Pour ceux qui auraient un doute : compléter le tableau et observer le graphique.

x	-5	-3	-1	0	0,5	1	3	5	100
$f(x)$	-11	-7	-3	-1	0	1	5	9	199



Signe d'un produit de fonctions affines ; inéquation-produit

On étudie le signe de produits de fonctions affines à l'aide d'un tableau de signes.

Étudions par exemple le signe de

$$(3x + 1)(-x + 4)$$

Ces deux expressions changent de signe pour $x = -\frac{1}{3}$ et $x = 4$ (résoudre $3x + 1 = 0$ et $-x + 4 = 0$).

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	4	$+\infty$	
$3x + 1$	-	0	+	+	
$-x + 4$	+	+	0	-	
produit	-	0	+	0	-

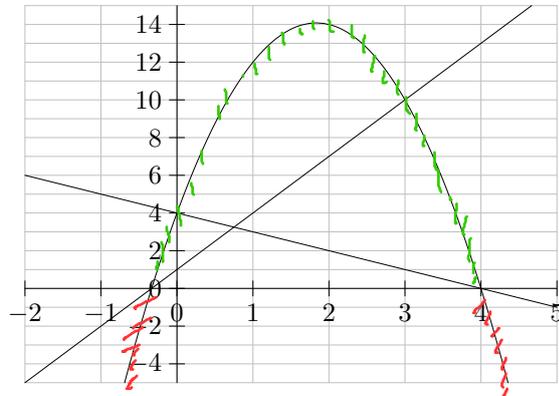
La dernière ligne se remplit à l'aide de la règle donnant le signe d'un produit.

On peut à présent résoudre des inéquations-produits : la solution de $(3x+1)(-x+4) > 0$ est :

La solution de $(3x + 1)(-x + 4) \leq 0$ est : $]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [4; +\infty[$

Lien avec les fonctions

On a représenté les fonctions $x \mapsto 3x + 1$, $x \mapsto -x + 4$ et $x \mapsto (3x + 1)(-x + 4)$. Retrouver tous les signes et les zéros du tableau ci-dessus sur le graphique.



Inéquations quotients

La règle des signes est la même pour les produits et pour les quotients. Résolvons par exemple $\frac{x^2 + 1}{x + 3} \geq 0$.

$x + 3$ s'annule pour $x = -3$ qui est donc une valeur interdite (d'où la double-barre dans le tableau).

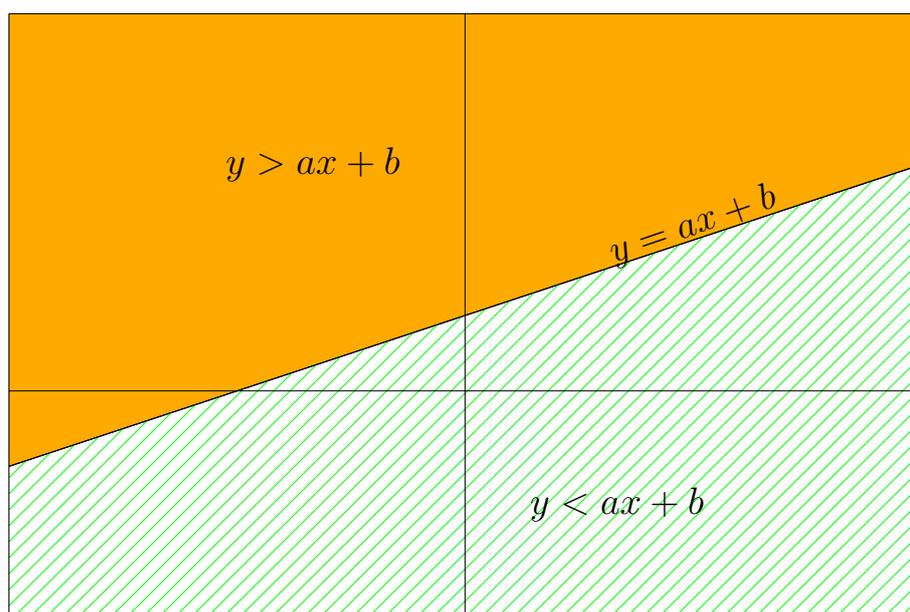
$x^2 + 1$ n'est pas une fonction affine, mais on sait que pour tout x , $x^2 \geq 0$. Par conséquent, $x^2 + 1 \geq 1$, donc est positif strictement.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x^2 + 1$	+		+
$x + 3$	-	0	+
quotient	-		+

La solution de l'inéquation-quotient est : $]-3; +\infty[$

Régionnement du plan (supplément, pas au programme)

La droite d'équation $y = ax + b$ sépare le plan en deux régions.



Cela permet de résoudre graphiquement des inéquations à deux inconnues.

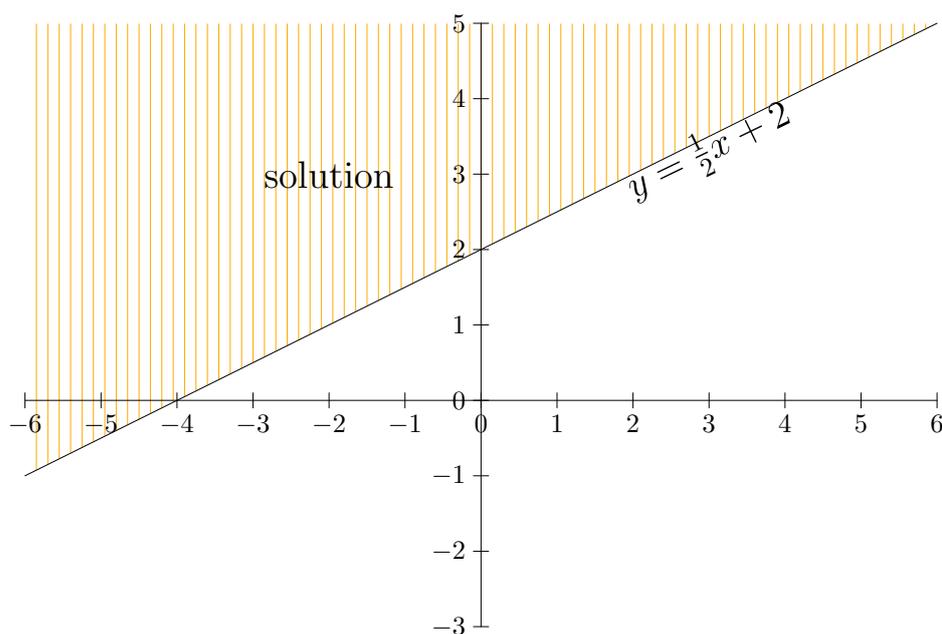
Exemple : représentons dans le plan l'ensemble des solutions de :

$$x - 2y + 4 < 0$$

Cette inéquation est équivalente à :

$$y > \frac{1}{2}x + 2$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ sépare le plan en deux demi-plans. La solution de l'inéquation est l'ensemble des couples qui sont les coordonnées des points de la zone hachurée.



8.1.2 Fonction carré

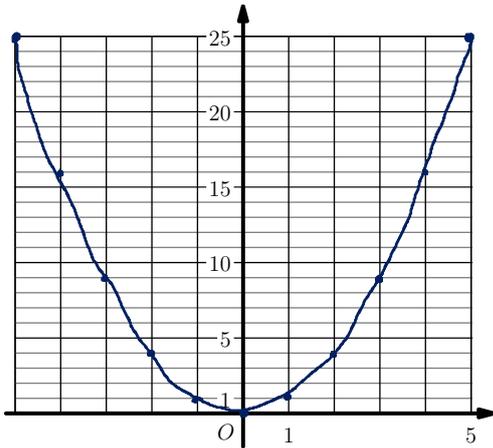
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

Elle est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; 0]$.

On résume ces résultats dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘		↗
		0	



Cette courbe s'appelle une *parabole*. On remarque que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on dit que la fonction est *paire*.

8.1.4 Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$; à tout réel positif x , elle associe \sqrt{x} . Elle est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
f	↗	
	0	

8.1.3 Fonction inverse

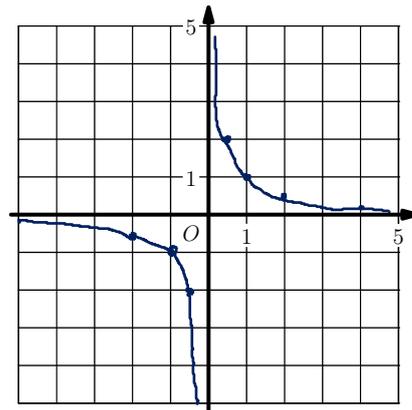
$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

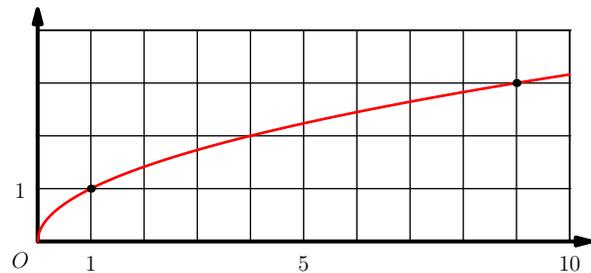
La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘		↘



Cette courbe s'appelle une *hyperbole*. Elle est symétrique par rapport à O : on dit que f est *impaire*.

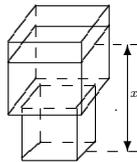


Exercice 8.1. Déterminer la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(-1) = 3$ par le calcul et graphiquement.

Exercice 8.2. Températures en degrés Celsius et degrés Fahrenheit. L'eau bout à 100 degrés C et 212 degrés F. Elle gèle à 0 degré C et 32 degrés F. Sachant que la température en degrés F est une fonction affine de la température en degrés C, trouver une relation entre les deux. Trouver à quoi correspondent : 18 degrés C, 40 degrés C, 60 degrés F et 99,9 degrés F.

Exercice 8.3. Fonction affine par morceaux. Volume de la cuve

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent. L'arête du grand cube mesure 80 cm, celle du petit 60 cm. Le petit est posé par terre.



On désigne par x (en cm) la hauteur du liquide dans la cuve et par $V(x)$ le volume en litres du liquide correspondant.

Représentez graphiquement le volume $V(x)$ en fonction de x . Prenez en abscisse 1 cm pour 10 cm et en ordonnées 1 cm pour 50 litres.

- Exercice 8.4.**
1. Dans un repère, représenter les fonctions affines f et g définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 3$ et $g(x) = 2x - 4$.
 2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.
 3. Établir un tableau de signe de la fonction C définie pour tout x réel par $C(x) = (-x + 3)(2x - 4)$, puis en déduire les solutions de $C(x) < 0$.

Exercice 8.5. Résoudre :

- $(x + 7)(1 - 4x) < 0$
- $\frac{x + 7}{1 + 4x} < 0$
- $(2x - 1)(x - 1)(1 - x) > 0$

Exercice 8.6. À l'aide d'une représentation graphique rapide des fonctions carré, inverse et racine, résoudre les inéquations :

- a) $x^2 < 4$; b) $x^2 \geq 7$; c) $x^2 < -1$; d) $x^2 > -7$
- e) $\frac{1}{x} > 10$; f) $\frac{1}{x} < -0,5$; g) $\frac{1}{x} > -2$; h) $\sqrt{x} < 4$
- i) $\sqrt{x} \geq 7$; j) $\sqrt{x} < -1$; k) $\sqrt{x} > -7$

Peut-on affirmer que si $x > -0,5$, alors on a $x^2 > 0,25$?

Exercice 8.7. Monsieur François va ouvrir un marché « puces et brocante » sur son terrain. Il y a délimité 120 emplacements. L'installation des exposants commencera à 6 h, le dernier exposant devra avoir fini de s'installer à 8 h. Il prévoit que chaque exposant arrivant :

- avec une voiture, paiera 10 euros de redevance et disposera de deux emplacements pour installer son stand,
- avec un fourgon, paiera 16 euros de redevance et disposera de trois emplacements.

Il faut en moyenne 1 min à une voiture pour se garer et 4 min à un fourgon.

Pour des raisons de sécurité, chaque exposant ne peut commencer à se garer que lorsque le précédent a fini de se garer.

Monsieur François souhaite déterminer le nombre de voitures et le nombre de fourgons nécessaires pour que sa recette soit maximale.

Partie A : On note x le nombre de voitures et y le nombre de fourgons.

1. Écrire un système d'inéquations correspondant aux contraintes du problème.
2. En utilisant la feuille de papier millimétré fournie, déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) suivant avec comme unité graphique 1 cm pour 5 unités sur les deux axes. On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

$$(S) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{2}{3}x + 40 \\ y \leq -\frac{1}{4}x + 30 \end{cases}$$

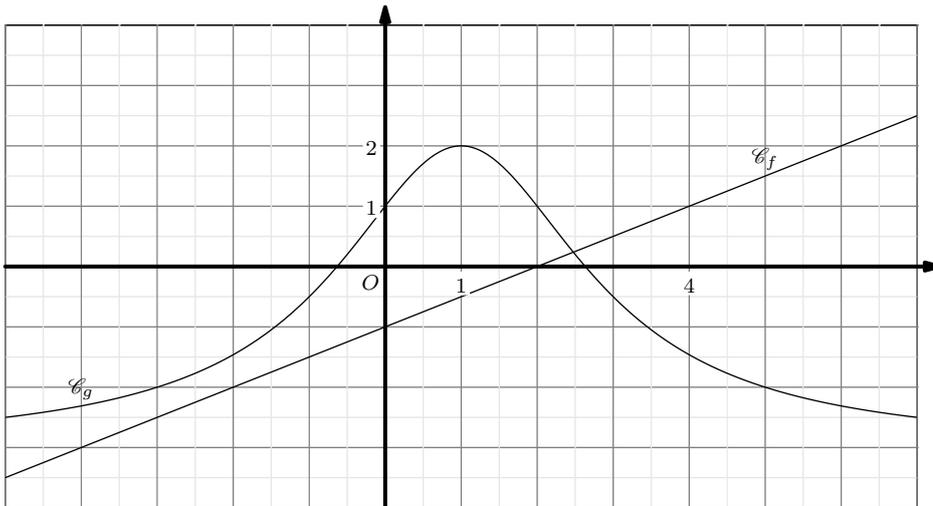
3. Après avoir justifié le lien entre les questions 1 et 2, préciser si Monsieur François peut accueillir :
 - (a) 50 voitures et 20 fourgons ?
 - (b) 30 voitures et 15 fourgons ?
 - (c) 24 voitures et 24 fourgons ?

Partie B : On note R la recette de la journée

1. Exprimer R en fonction de x et y .
2. Montrer que la droite D d'équation $y = -\frac{5}{8}x + 10$ correspond à une recette de 160 euros.
3. (a) Représenter la droite D dans le repère précédent.
 (b) Trouver le couple d'entiers $(x ; y)$ qui permet d'obtenir la recette maximale.
 (c) Calculer alors cette recette maximale et répondre au problème posé.

Exercice 8.8. On a tracé ci-contre sur $[-5; 7]$ la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction affine f et la courbe \mathcal{C}_g d'une fonction g .

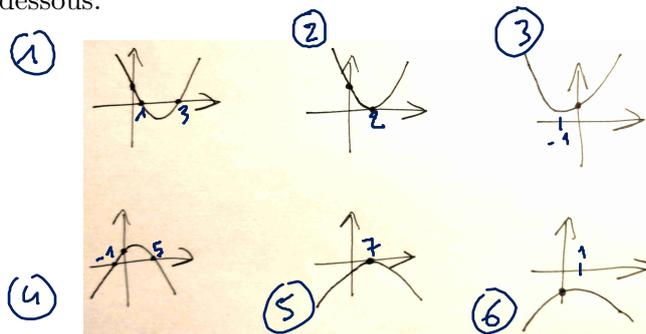
1. Indiquer, dans un tableau, le signe de f . Sans justifier, donner l'expression de f . Indiquer, dans un tableau, les variations de g .
2. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative des fonctions h , m et p définies sur $[-5; 7]$ par $h(x) = x^2$, $m(x) = \frac{1}{x}$ et $p(x) = \frac{4 - 2x}{3}$.
3. Sans justifier (et en donnant si besoin des valeurs approchées), déterminer graphiquement $f(1)$ et résoudre : $f(x) = -1$; $g(x) > -2$; $\frac{2}{x} < 0$; $x^2 \geq 3$; $x^2 \geq \frac{1}{x}$; $f(x) - g(x) < 0$.
4. Supplément : résoudre les (in)équations précédentes par le calcul.



8.2 Fonctions polynômes de degré 2

Ce sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 a, b et c sont des nombres réels.

À l'aide de la calculatrice, trouver six fonctions polynômes de degré 2 correspondant aux schémas ci-dessous.



① $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

② $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

③ $f(x) = (x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$

④ $f(x) = -2(x+1)(x-5) = -2x^2 + 8x + 20$

⑤ $f(x) = -5(x-7)^2$

⑥ $f(x) = -3(x-1)^2 - 10$

Remarques

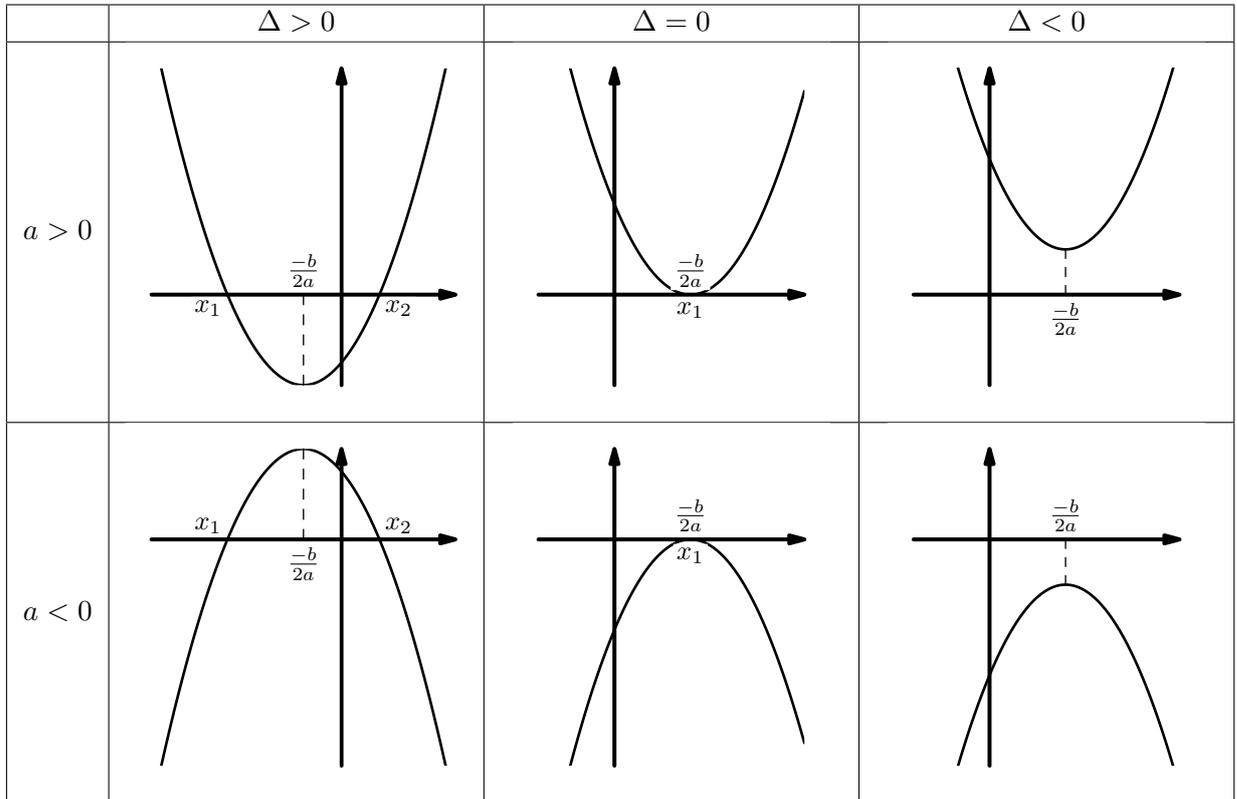
- si $a > 0$ \cup
- si $a < 0$ \cap
- $f(0) = c$

Second degré

La fonction polynôme du second degré f est définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(a, b, c réels, $a \neq 0$). Ses variations et son signe sont connus et visibles sur les représentations graphiques de f :



Signe

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines éventuelles.

Variations

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f			

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f			

Résolution de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

— Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

— Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Factorisation d'un polynôme du second degré

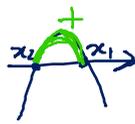
- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
- Si $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas en produit de facteurs du premier degré.

Exemple 1. $2x^2 + x + 1 = 0$ $a=2$ $b=1$ $c=1$
 $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$: pas de solution

Exemple 2. $2x^2 - 5x - 1 = 0$ $a=2$ $b=-5$ $c=-1$
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 33$
 Deux solutions : $x_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}$

Exemple 3. $x^2 - 6x + 9 = 0$ $a=1$ $b=-6$ $c=9$
 $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$. Une solution : $x_1 = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = 3$

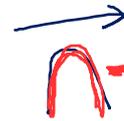
Exemple 4. $-3x^2 - 5x + 1 \geq 0$
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 37$
 $x_1 = \frac{5 - \sqrt{37}}{-6}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{-6}$

$a = -3 < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas : 
 La solution de l'inéquation est donc
 $]x_2; x_1[$

Exemple 5. $-7x^2 + x - 8 > 0$

- $\Delta = 1^2 - 4 \times (-7) \times (-8) = -223 < 0$: pas de racines
- $a = -7$ donc la parabole est tournée vers le bas

Pour tout x , $-7x^2 + x - 8 < 0$ donc
 l'inéquation n'a pas de solution.



Exemple 6. $-x^2 + 4x - 4 < 0$

- $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$. Une racine : $\frac{-4}{2 \times (-1)} = 2$
- $a = -1 < 0$ donc



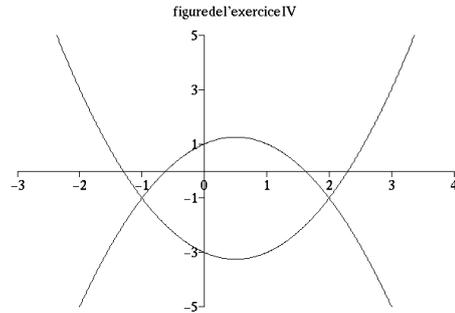
La fonction $x \mapsto -x^2 + 4x - 4$ est négative pour tout x
 (elle est nulle pour $x=2$)
 La solution de l'inéquation est donc
 $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty [$
 (tous les réels sauf 2).

Exercice 8.9. Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

a) $-x^2 + x + 1 = 0$; b) $5x^2 + 7x + 6 = 0$; c) $7x^2 + 4x = 0$
 d) $-x^2 + 2x - 3 \leq 0$; e) $x^2 + 4x + 4 > 0$

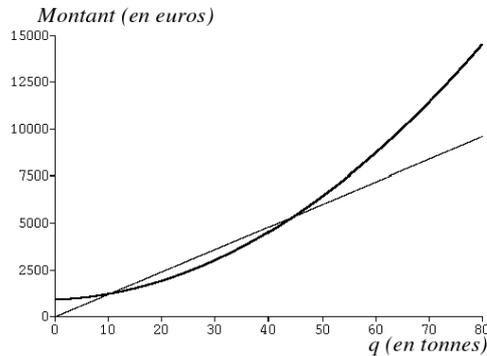
Exercice 8.10. Le graphique ci-contre représente deux paraboles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 d'équations respectives $y = x^2 - x - 3$ et $y = -x^2 + x + 1$.

$f_2(x)$. Quelle est la signification graphique de la solution ?



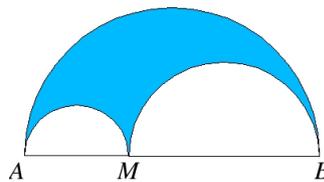
- Déterminer les coordonnées du sommet S_1 de \mathcal{P}_1 et donner les variations de la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 - x - 3$.
Donner dans un tableau le signe de la fonction f_2 définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = -x^2 + x + 1$.
- Résoudre l'inéquation $f_1(x) >$

Exercice 8.11. Une entreprise produit de la farine de blé. On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentant la fonction coût total C (en gras) et la courbe représentant la fonction recette totale R .



- Lire graphiquement les quantités de farine que doit produire l'entreprise pour que la production soit rentable.
- On sait que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ et que $R(q) = 120q$. Reprendre la question 1. par le calcul.
- Déterminer par le calcul la quantité produite quand le coût est 2500 €.
- Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0; 80[$ par $f(q) = R(q) - C(q)$. Quel est son maximum ? Que représente ce maximum dans ce problème ?

Exercice 8.12. \mathcal{C} est un demi-cercle de rayon 5cm. À l'intérieur de \mathcal{C} , on trace les demi-cercles de diamètres $[AM]$ et $[BM]$. Où placer M pour que l'aire coloriée soit maximale ?

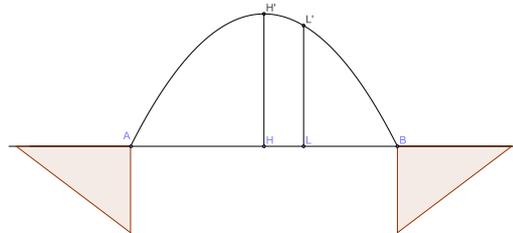


Exercice 8.13. La parabole \mathcal{P} d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par $A(0;1)$, $B(1;-1)$ et $C(3;1)$. Déterminer a , b , c .

Exercices supplémentaires sur le second degré

Exercice 8.14. Dans un repère, \mathcal{P} est la parabole d'équation $y = 5x^2 + 3x - 2$. A est le point de \mathcal{P} d'abscisse 1. Parmi toutes les droites non parallèles à l'axe des ordonnées et qui passent par A , en existe-t-il une qui coupe \mathcal{P} en un seul point ? Si oui, donner son équation.

Exercice 8.15. La figure représente un pont métallique dont le tablier horizontal AB est supporté par un arc de parabole d'axe vertical HH' . Sachant que $AB = 40\text{m}$, que $HL = 5\text{m}$ et que $HH' = 16\text{m}$, quelle est la longueur de la barre verticale LL' ?



Exercice 8.16. Parmi tous les rectangles de périmètre 13m, quels sont ceux d'aire maximale ?

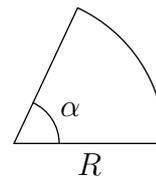
Exercice 8.17. Le libraire achète des livres pour 80 €. Avec 4 livres de plus, pour le même prix total, chaque livre aurait coûté 1 € de moins.

Exercice 8.18. Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 34 cm et l'aire à 60 cm² ?

Exercice 8.19. Avec 5 km/h de plus le train mettrait 2 heures de moins sur un trajet de 300 km. Quelle est sa vitesse ?

Exercice 8.20. Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant son périmètre 48 m et son aire 96 m².

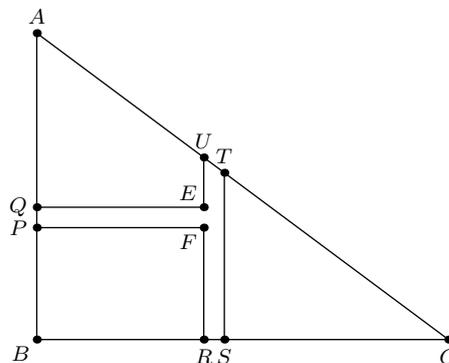
Exercice 8.21. On souhaite confectionner des bredele¹ en forme de secteur circulaire à l'aide d'un emporte-pièce de périmètre 20 cm. Déterminer le rayon et l'angle du secteur de manière à rendre l'aire des bredele maximale.



Exercice 8.22. Rose possède un jardin en forme de triangle ABC , rectangle en B , avec $BA = 30\text{ m}$ et $BC = 40\text{ m}$.

Elle y a tracé une allée large de 2 m telle que les trois parties restantes (un triangle rectangle, un trapèze rectangle et un rectangle) ont la même aire.

Déterminer les longueurs SC , ST , BR , BP , AQ et UE .



1. Nom alsacien donné à de petits gâteaux sucrés, souvent confectionnés à l'occasion des fêtes de fin d'année.

Exercice 8.23. Les mesures des côtés d'un triangle sont 3, 4 et 6. Est-il possible d'ajouter une même longueur à chacun de ses côtés pour obtenir un triangle rectangle ?

Exercice 8.24. Lors d'une soirée, chaque personne a échangé une fois et une seule une poignée de mains avec chacune des autres personnes. On a dénombré 55 poignées de mains. Combien de personnes étaient présentes à cette soirée ?

Exercice 8.25. Le drapeau finlandais est un rectangle de 1m80 sur 1m10 représentant une croix bleue sur fond blanc comme représenté sur le dessin ci-dessous. Les quatre branches de la croix ont la même largeur. Le chef du protocole vous précise que l'aire de la croix doit correspondre exactement à treize trente-sixièmes de l'aire totale du drapeau.

1. Montrer que cette condition équivaut à l'égalité : $x^2 + 29x - 78 = 0$, où x représente la largeur de la croix, en mètres.
2. Déterminer alors la valeur de x pour que cette condition soit remplie.



Exercice 8.26. Sans calculatrice, résoudre dans \mathbb{R} : $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{18})x + 6 = 0$

Exercice 8.27. Déterminer les solutions de $(m + 1)x^2 + (2m + 1)x + m - 2 = 0$ suivant les valeurs de m .

Exercice 8.28. Déterminer les solutions de $x^2 + 2x + m^2 = 0$ suivant les valeurs de m .

Exercice 8.29. Somme et produit des racines.

Dans le cas où l'équation du second degré admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , démontrer que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Application

Trouver une solution évidente et en déduire l'autre à l'aide de ce qui précède :

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $x^2 + 19x + 18 = 0$
3. $x^2 + (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$
4. $(m - 2)x^2 + 5x + 7 - m = 0$, pour $m \neq 2$.

Exercices sur le second degré et les fonctions

Exercice 8.30. Déterminer les solutions de

$$x^2 < 7 \quad ; \quad x^2 \geq 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} > -2 \quad ; \quad \sqrt{x} \leq 6$$

Justifier à l'aide d'un schéma rapide.

Exercice 8.31. Résoudre les équations et inéquations :

- $3x^2 - 2x + 7 = 0$
- $-x^2 + 3x + 50 = 0$
- $x^2 - 12x = 0$
- $5x^2 + x - 1 > 0$
- $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

Exercice 8.32. En 2016, une entreprise compte produire au plus 60 000 téléphones mobiles pour la France et les vendre 800 € l'unité. On supposera que tous les téléphones produits sont vendus. On s'intéressera dans cet exercice au bénéfice éventuel réalisé par l'entreprise.

Après plusieurs études, les coûts, en euros, liés à la production, à la distribution et à la publicité, sont modélisés par

$$C(x) = 0,01x^2 + 250x + 2\,500\,000$$

(où x est le nombre d'exemplaires fabriqués et vendus).

1. Montrer que le bénéfice, selon le nombre x d'exemplaires vendus, est défini sur l'intervalle $[0; 60\,000]$ par

$$f(x) = -0,01x^2 + 550x - 2\,500\,000.$$

2. L'entreprise a-t-elle intérêt à produire 60 000 exemplaires en 2016? Justifier la réponse.
3. (a) Résoudre l'équation $-0,01x^2 + 550x - 2\,500\,000 = 0$.
(b) Quelle est la signification de la (ou des) solution(s) trouvée(s)?
4. (a) Donner le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0; 60\,000]$.
(b) Combien l'entreprise doit-elle vendre de téléphones pour gagner de l'argent?
5. (a) Donner, en justifiant votre démarche, le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 60\,000]$.
(b) Combien l'entreprise doit-elle vendre de téléphones pour réaliser un bénéfice maximal? Quel est alors ce bénéfice?