11.6 Corrigés d'exercices

Exercice 11.18

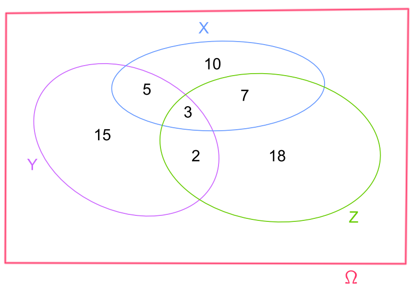
Dans un groupe de quatre personnes prises au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même mois ? On suppose que, pour chaque personne, tous les mois d'anniversaire sont équiprobables.

simulation en Python (fichier html)

```
(Affecter_a moisdifferents 0)
(Affecter_a nombreiterations 10000)
(Affecter_a credit_iterations (+ nombreiterations 1))
(Affecter_a nombre 1)
(Tant_que (<= nombre nombreiterations)
 Faire
    (Affecter_a moisindividu1 (Entier@ 1 12))
    (Affecter_a moisindividu2 (Entier@ 1 12))
    (Affecter_a moisindividu3 (Entier@ 1 12))
    (Affecter_a moisindividu4 (Entier@ 1 12))
    (Si (Et (=/ moisindividu1 moisindividu2)
            (=/ moisindividu2 moisindividu3)
            (=/ moisindividu3 moisindividu4)
            (=/ moisindividu1 moisindividu3)
            (=/ moisindividu2 moisindividu4)
            (=/ moisindividu1 moisindividu4))
     Alors
       (Affecter_a moisdifferents (+ moisdifferents 1))
    )
    (Affecter_a nombre (+ nombre 1))
)
(Afficher (/ moisdifferents nombreiterations))
```

sorties : 0,58 ; 0,57 ; 0,57

Corrigé de l'exercice 11.21

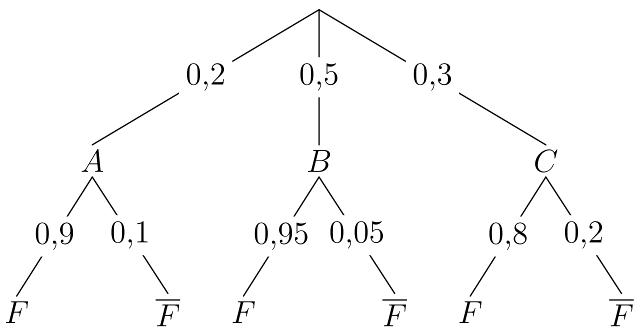


1. (a) $P(X) = \frac{10}{25}$ faux
   (b) $P(X) = \frac{25}{60}$ vrai
   (c) $P(Y) = \frac{25}{60}$ vrai

2. (a) $P(X \cap Y) = \frac{3}{8}$ faux
   (b) $P(X \cap Y) = \frac{10}{37}$ faux
   (c) $P(X \cap Y) = \frac{8}{60}$ vrai
3. (a) $P(Y \cup Z) = \frac{5}{6}$ vrai : $P(Y \cup Z) = \frac{50}{60}$
   (b) $P(\overline{Z}) = \frac{1}{2}$ vrai : $P(\overline{Z}) = 1 - P(Z) = 1 - \frac{30}{60}$
   (c) $P(Y \cap \overline{Z}) = \frac{1}{3}$ vrai : $P(Y \cap \overline{Z}) = \frac{20}{60}$
4. (a) $P_Y(X) = \frac{8}{25}$ vrai
   (b) $P_Z(Y) = \frac{12}{30}$ faux : $P_Z(Y) = \frac{5}{30}$
   (c) $P_{\overline{X}}(Y) = \frac{17}{35}$ vrai

Corrigé de l'exercice 11.22

Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes : 20% pour la machine A, 50% pour B, 30% pour C. Les fiabilités respectives des machines A, B, C sont 0,9 ; 0,95 et 0,8 (autrement dit : la probabilité pour qu'une ampoule fabriquée par A soit bonne est 0,9 ...).



On achète une ampoule. On note

- A l'événement « l'ampoule est fabriquée par la machine A » ;
- B l'événement « l'ampoule est fabriquée par la machine B » ;
- C l'événement « l'ampoule est fabriquée par la machine C » ;
- F l'événement « l'ampoule est bonne ».

On achète une ampoule ; elle est bonne. La probabilité que l'ampoule ait été fabriquée par A sachant qu'elle est bonne vaut

$$\begin{aligned} P_F(A) &= \frac{P(A \cap F}{P(F)} \\ &= \frac{P(A) \times P_A(F)}{P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) + P(C) \times P_C(F)} \\ &= \frac{0{,}2 \times 0{,}9}{0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}8} \\ &\simeq \boxed{0{,}201} \end{aligned}$$

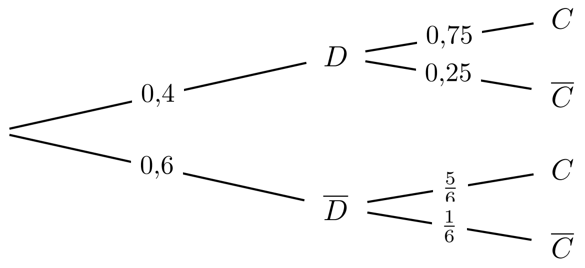
On a pu utiliser la formule de Bayes car A, B et C forment une partition de l'univers.

Corrigé de l'exercice 11.23

Dans un restaurant, on a constaté que :
— 80% des clients prennent un café ;
— 40% des clients prennent un dessert, dont les $\frac{3}{4}$ prennent aussi un café.

1. On choisit un client du restaurant au hasard. On note C l'événement « le client prend un café » et D l'événement « le client prend un dessert ».
   L'énoncé indique : $P(C) = 0{,}8$, $P(D) = 0{,}4$ et $P_D(C) = \dfrac{3}{4}$.
   (a) La probabilité qu'il prenne un dessert et un café est
   $$P(C \cap D) = P(D) \times P_D(C) = 0{,}4 \times \frac{3}{4} = \boxed{0{,}3}$$
   (b) D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :
   $$P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap \overline{D})$$
   On en déduit
   $$\begin{aligned} 0{,}8 &= 0{,}3 + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(C) \\ 0{,}5 &= 0{,}6 \times P_{\overline{D}}(C) \\ P_{\overline{D}}(C) &= \frac{0{,}5}{0{,}6} \end{aligned}$$
   La probabilité qu'il ne prenne ni dessert ni café est
   $$\begin{aligned} P(\overline{C} \cap \overline{D}) &= P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(\overline{C}) \\ &= 0{,}6 \times (1 - P_{\overline{D}}(C)) \\ &= 0{,}6 \times (1 - \frac{5}{6}) \end{aligned}$$
   $$\boxed{P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}1}$$
2. On choisit un client qui a pris un café. La probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert est
   $$\begin{aligned} P_C(\overline{D}) &= \frac{P(C \cap \overline{D}}{P(C)} \\ &= \frac{0{,}5}{0{,}8} \end{aligned}$$
   $$\boxed{P_C(\overline{D}) = \frac{5}{8}}$$
3. Sachant qu'un client n'a pas pris de café, la probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert est
   $$\begin{aligned} P_{\overline{C}}(\overline{D}) &= \frac{P(\overline{C} \cap \overline{D}}{P(\overline{C})} \\ &= \frac{0{,}1}{0{,}2} \end{aligned}$$
   $$\boxed{P_{\overline{C}}(\overline{D}) = \frac{1}{2}}$$

Un arbre peut aider :



Corrigé de l'exercice 11.24

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : trois bleues et deux rouges. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

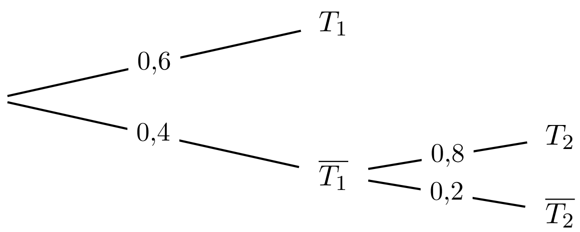
On note B_1, B_2, B_3 les trois boules bleues, R_1 et R_2 les deux rouges.
L'univers est formé par les 20 couples ...

1. La probabilité que la seconde boule tirée soit bleue sachant que la première est rouge vaut
$$\boxed{p_1 = \frac{6}{8}}$$
Les 6 cas sont $(R_1{,}B_1)$, $(R_1{,}B_2)$, $(R_1{,}B_3)$, $(R_2{,}B_1)$, $(R_2{,}B_2)$, $(R_2{,}B_3)$.
Les 8 cas sont $(R_1{,}B_1)$, $(R_1{,}B_2)$, $(R_1{,}B_3)$, $(R_1{,}R_2)$, $(R_2{,}B_1)$, $(R_2{,}B_2)$, $(R_2{,}B_3)$, $(R_2{,}R_1)$.
2. La probabilité que la seconde boule tirée soit rouge sachant que la première est bleue vaut
$$\boxed{p_2 = \frac{6}{12}}$$
Les 6 cas sont $(B_1{,}R_1)$, $(B_1{,}R_2)$, $(B_2{,}R_1)$, $(B_2{,}R_2)$, $(B_3{,}R_1)$, $(B_3{,}R_2)$.
Les 12 cas sont $(B_1{,}B_2)$, $(B_1{,}B_3)$, $(B_1{,}R_1)$, $(B_1{,}R_2)$, $(B_2{,}B_1)$, $(B_2{,}B_3)$, $(B_2{,}R_1)$, $(B_2{,}R_2)$, $(B_3{,}B_1)$, $(B_3{,}B_1)$, $(B_3{,}R_1)$, $(B_3{,}R_2)$.
3. La probabilité que la première boule tirée soit bleue sachant que la seconde est rouge vaut
$$\boxed{p_3 = \frac{6}{8}}$$
Les 6 cas sont $(B_1{,}R_1)$, $(B_1{,}R_2)$, $(B_2{,}R_1)$, $(B_2{,}R_2)$, $(B_3{,}R_1)$, $(B_3{,}R_2)$.
Les 8 cas sont $(B_1{,}R_1)$, $(B_1{,}R_2)$, $(B_2{,}R_1)$, $(B_2{,}R_2)$, $(B_3{,}R_1)$, $(B_3{,}R_2)$, $(R_1{,}R_2)$, $(R_2{,}R_1)$.
4. La probabilité que la première boule tirée soit bleue sachant que les deux boules tirées sont de même couleur vaut
$$\boxed{p_4 = \frac{6}{8}}$$
Les 6 cas sont $(B_1{,}B_2)$, $(B_1{,}B_3)$, $(B_2{,}B_1)$, $(B_2{,}B_3)$, $(B_3{,}B_1)$, $(B_3{,}B_2)$.
Les 8 cas sont $(B_1{,}B_2)$, $(B_1{,}B_3)$, $(B_2{,}B_1)$, $(B_2{,}B_3)$, $(B_3{,}B_1)$, $(B_3{,}B_2)$, $(R_1{,}R_2)$, $(R_2{,}R_1)$.

Corrigé de l'exercice 11.25

Marius est un joueur de pétanque averti. Lorsqu'il « tire » sur une boule pour la chasser du jeu, il la touche six fois sur dix lors du premier essai. S'il a échoué à son premier essai, il recommence et réussit le second tir huit fois sur dix.

Notons T_1 l'événement « Marius touche au premier essai » et T_2 l'événement « Marius touche au deuxième essai ».
On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre :



T_1 et $\overline{T_1}$ forment un système complet d'événements. La probabilité que Marius essuie un double échec est

$$P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(\overline{T_2}) = 0{,}4 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}08}$$

Corrigé de l'exercice 11.26

Dans la population d'une ville, on a relevé que, au cours des six derniers mois :

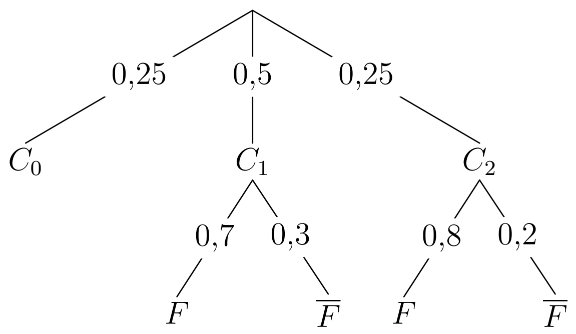
— 25% des individus ne sont pas allés au cinéma ;

— 50% d'individus sont allés une seule fois au cinéma, et 70% d'entre eux ont vu un film français ;

— 25% d'individus sont allés deux fois ou plus au cinéma, et 80% d'entre eux ont vu un film français.

On interroge au hasard un individu dans la ville en question. On note

- C_0 l'événement « l'individu n'est pas allé au cinéma » ;
- C_1 l'événement « l'individu est allé une seule fois au cinéma » ;
- C_2 l'événement « l'individu est allé deux fois ou plus au cinéma » ;
- F l'événement « l'individu a vu un film français ».



C_0, C_1 et C_2 forment une partition de l'univers. la formules des probabilités totales s'écrit :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap C_0) + P(F \cap C_1) + P(F \cap C_2) \\ &= 0 + P(C_1) \times P_{C_1}(F) + P(C_2) \times P_{C_2}(F) \\ &= 0 + 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}25 \times 0{,}8 \\ P(F) &= 0{,}55 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait vu un film français au cours des six derniers mois est $\boxed{0{,}55}$.

Corrigé de l'exercice 11.27

À un carrefour doté d'un feu tricolore, on a remarqué que :

— 2% des véhicules s'arrêtent au feu vert ;

— 65% des véhicules s'arrêtent au feu orange (comme le code de la route le demande) ;

— 97% des véhicules s'arrêtent au feu rouge.

On décide d'observer le comportement d'un véhicule se présentant au carrefour. On admet que l'état du feu, à l'arrivée du véhicule, est aléatoire, et que la probabilité que le feu soit vert est de 0,6, celle qu'il soit orange de 0,1 et celle qu'il soit rouge de 0,3. On note

- A l'événement « le véhicule s'arrête » ;
- V l'événement « le feu est vert » ;

- R l'événement « le feu est rouge » ;
- G l'événement « le feu est orange ».

1. V, R et G forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap V) + P(A \cap R) + P(A \cap G) \\ &= P(V) \times P_V(A) + P(R) \times P_R(A) + P(G) \times P_G(A) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}97 + 0{,}1 \times 0{,}65 \\ &= 0{,}368 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule observé s'arrête est $\boxed{0{,}368}$.

2. Le véhicule est passé. La probabilité qu'il l'ait fait au feu rouge est

$$\begin{aligned} P_{\overline{A}}(R) &= \frac{P(\overline{A} \cap R)}{P(\overline{A})} \\ &= \frac{0{,}3 \times 0{,}03}{1 - 0{,}368} \\ &\simeq \boxed{0{,}014} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 11.28

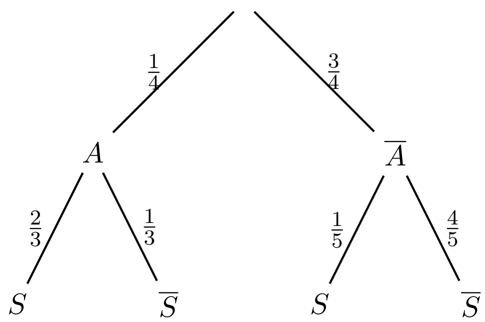
Denis le jardinier entretient le jardin de René.

Denis : « Deux fois sur trois, si j'arrose le matin, il pleut le soir. »

René : « Oui, mais quand vous n'arrosez pas le matin, c'est-à-dire trois jours sur quatre, il ne pleut pas le soir quatre fois sur cinq ! »

On note

- A l'événement « Denis le jardinier arrose le matin » ;
- S l'événement « il pleut le soir ».



Arnaud arrive un soir à l'improviste dans le jardin de René. La probabilité qu'il pleuve est

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(\overline{A} \cap S) \\ &= P(A) \times P_A(S) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(S) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \\ &= \boxed{\frac{19}{60}} \end{aligned}$$

On a utilisé la formules des probabilités totales, A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers.

Corrigé de l'exercice 11.29

On lance successivement deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'univers est constitué de 36 événements élémentaires équiprobables.

1. A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second »
   - D'une part, $P(A) \times P(B) = \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$.
   - D'autre part $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

   $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.
2. C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois ».
   - D'une part, $P(C) \times P(D) = \frac{6}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{6}{36^2}$.
   - D'autre part $P(C \cap D) = \frac{1}{36}$.

   $P(C) \times P(D) \neq P(C \cap D)$ donc les événements C et D ne sont pas indépendants.
3. E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort deux fois ».
   - D'une part, $P(E) \times P(F) = \frac{6}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{6}{36^2}$.
   - D'autre part $P(E \cap F) = 0$.

   $P(E) \times P(F) \neq P(E \cap F)$ donc les événements E et F ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 11.30

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges, dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1. On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.

Notons x le nombre de jetons verts numérotés 1 à rajouter dans l'urne pour que les événements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne.

On doit avoir $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, c'est-à-dire

$$\frac{100}{130+x} \times \frac{80}{130+x} = \frac{50}{130+x}$$

En multipliant les deux membres par $130 + x$, on obtient

$$\frac{100}{130+x} \times 80 = 50$$

$$8000 = 50(130 + x)$$

$$x = \frac{800}{5} - 130 = 30$$

Il faut rajouter $\boxed{30}$ jetons verts numérotés 1.

Corrigé de l'exercice 11.31

On lance deux fois consécutivement un dé cubique équilibré. On considère les événements :

— A : « la somme des numéros obtenus est paire »
— B : « le premier numéro obtenu est 6 ».
— C : « le numéro obtenu au premier lancer est strictement supérieur à celui obtenu au second lancer ».

1. L'univers est formé de 36 événements élémentaires équiprobables. Les sommes obtenues sont données dans le tableau :

dé 1 \ **dé 2**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$p_A(B) = \frac{3}{18}$$

(18 sommes sont paires ; quand c'est le cas, 6 est sort en premier 3 fois).

$$p_B(C) = \frac{5}{6}$$

(6 sort en premier 6 fois ; les 5 cas favorables sont (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)).

$$p_A(C) = \frac{6}{18}$$

(parmi les 18 fois où la somme est paire, les cas favorables sont (3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)).

2. - $p_A(B) = \frac{1}{6}$ est égale à $p(B) = \frac{6}{36}$. $p(A)$ n'étant pas nulle, cela prouve que A et B sont indépendants.
   - $p_A(C) = \frac{1}{3}$ n'est pas égale à $p(C) = \frac{15}{36}$. $p(A)$ n'étant pas nulle, cela prouve que A et B ne sont pas indépendants.
   - $p_B(C) = \frac{5}{6}$ n'est pas égale à $p(C) = \frac{15}{36}$. $p(A)$ n'étant pas nulle, cela prouve que C et B ne sont pas indépendants.

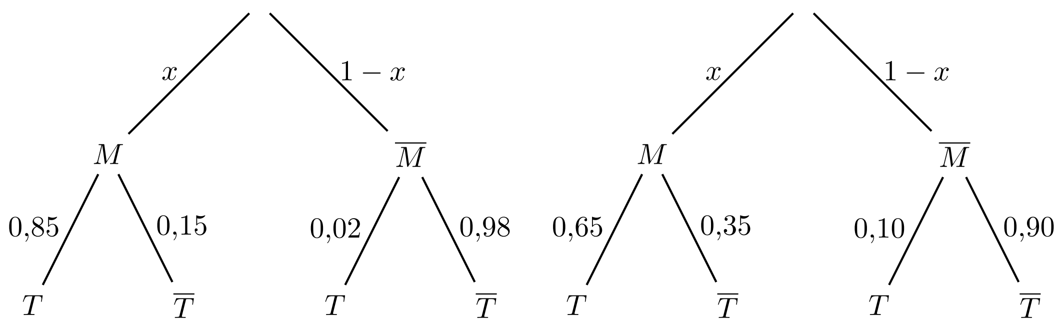
Exercice 11.33

1. À l'aide de l'article, on peut compléter le tableau :

	test moyen	test médiocre
sensibilité : $P_M(T)$	0,85	0,65
spécificité : $P_{\overline{M}}(\overline{T})$	0,98	0,90

2. Arbres :

Test moyen Test médiocre



3. Voir à la fin
4. Dans cette question, on s'intéresse uniquement au test le plus performant.

(a) Sur $[0;1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= P_T(M) \\ &= \frac{P(T\cap M)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}85x}{0{,}85x+0{,}02(1-x)} \\ &= \frac{0{,}85x}{0{,}83x+0{,}02} \end{aligned}$$

(b) $f'(x) = \dfrac{(0{,}83x+0{,}02)\times 0{,}85 - 0{,}83\times 0{,}85x}{(0{,}83x+0{,}02)^2} = \dfrac{0{,}017}{(0{,}83x+0{,}02)^2}$.

(c) Pour tout x de $[0;1]$, $f'(x)$ est strictement positif donc f est croissante sur $[0;1]$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

(d) $f(x) = \dfrac{0{,}85x}{0{,}83x+0{,}02} > 0{,}99$ équivaut à

$$x > \frac{0{,}02\times 0{,}99}{0{,}85-0{,}83\times 0{,}99}$$

$$x > 0{,}6996$$

$P_T(M)$ dépasse 0,99 si le virus est présent chez 70% de la population.

5. Dans cette question, on s'intéresse uniquement au test le moins performant.

(a) Sur $[0;1]$,

$$\begin{aligned} g(x) &= P_T(M) \\ &= \frac{P(T\cap M)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}65x}{0{,}65x+0{,}10(1-x)} \\ &= \frac{0{,}65x}{0{,}55x+0{,}10} \end{aligned}$$

(b) $g(x) = \dfrac{0{,}65x}{0{,}55x+0{,}10} > 0{,}99$ équivaut à

$$x > \frac{0{,}10\times 0{,}99}{0{,}65-0{,}55\times 0{,}99}$$

$$x > 0{,}93838$$

$P_T(M)$ dépasse 0,99 si le virus est présent chez 94% de la population. Interpréter ce résultat.

Vérification des valeurs encadrées :

x	0,02	0,12	0,25
$f(x)$	0,464	0,853	0,934
$g(x)$	0,117	0,469	0,684

Seule la valeur 83% pose problème : quand $P(M) = 0{,}02$, « le test est faussement positif dans $\boxed{83\%}$ des cas ». C'est-à-dire : $P_T(\overline{M}) = 0{,}83$ pour le test médiocre apparemment.

Or $P_T(\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}98 \times 0{,}10}{0{,}02 \times 0{,}65 + 0{,}98 \times 0{,}10} \simeq 0{,}882$.

D'ailleurs, c'est $1 - P_T(M) =\simeq 1 - 0{,}117$.

Exercice 11.34 La probabilité que 130 personnes exactement, parmi les 400 interrogées, soient membres d'au moins une association est 0,0416.

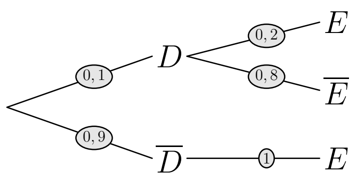
Exercice 11.35 En France, 80% des enfants de 2 à 5 ans sont scolarisés. Sur 150 enfants âgés de 2 à 5 ans pris au hasard. La probabilité qu'exactement 125 d'entre eux soient scolarisés est 0,0505

Exercice 11.37

1. X est un entier allant de 0 à 250.
2. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(250\ ;\ 0{,}02)$ car on répète 250 fois, de manière indépendante, l'expérience de Bernoulli : l'ascenseur est en panne - l'ascenseur n'est pas en panne. Son espérance est
$$E(X) = np = 250 \times 0{,}02 = 5$$
En moyenne, chaque semaine, 5 ascenseurs tombent en panne.
3. La probabilité, qu'une semaine donnée, aucun ascenseur ne tombe en panne est
$$P(X = 0) = (1 - 0{,}02)^{250} \simeq 0{,}0064$$
4. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0{,}9936$
$P(X = 4) \simeq 0{,}1765$
5. La probabilité que lors d'une semaine, il y ait (strictement) moins de 4 pannes, est :
$$P(X \leqslant 3) \simeq 0{,}2622$$

Exercice 11.38

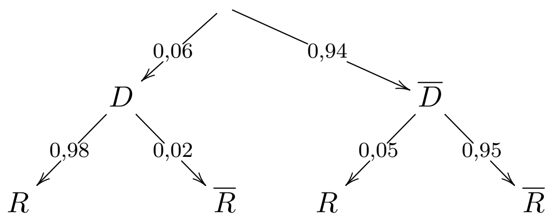
1. (a) On a la loi binomiale $\mathcal{B}(8\ ;\ 0{,}1)$, de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}1$.
   (b) $p(A) = p(X = 0) = 0{,}9^8 \simeq \boxed{0{,}43}$, à 10^{-2} près.
   $p(B) = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(A) \simeq \boxed{0{,}57}$.
   $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^6 \simeq \boxed{0{,}15}$.
2. (a) On a l'arbre de probabilités suivant :



   (b) En utilisant les branches conduisant à E et en utilisant la formule des probabilités totales :
   $p(E) = p(D) \times p_D(E) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(E) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}9 \times 1 = \boxed{0{,}92}$.
   (c) $p_E(D) = \dfrac{p(E \cap D)}{p(E)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}92} \simeq \boxed{0{,}022}$.
3. On a à nouveau une épreuve binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$. La probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos est : $0{,}98^8 \simeq \boxed{0{,}85}$.
(pour les calculs avec $(1 - 0{,}022)^8$, on trouve 0,84)
Conclusion : c'est presque le double de $p(A)$, donc ce contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.

Exercice 11.39

1. Arbre :



2. (a) En suivant la deuxième branche : $p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}) = 0{,}06 \times 0{,}02 = 0{,}0012$.

   (b) Il y a erreur de contrôle pour les évènements disjoints $\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}$ et $\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}$.
   La probabilité d'une erreur de contrôle est donc :
   $p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}) + p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}) = 0{,}06 \times 0{,}02 + 0{,}94 \times 0{,}05 = 0,0012 + 0{,}0470 = 0{,}0482$.

3. La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à :

$$\begin{aligned} p(\overline{R}) &= p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}\right) + p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{R}}\right) \\ &= 0{,}06 \times 0{,}02 + 0{,}94 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}0012 + 0{,}8930 \\ &= 0{,}8942 \end{aligned}$$

4. La probabilité que le lecteur soit défectueux sachant qu'il n'a pas été rejeté est

$$P_{\overline{R}}(D) = \frac{P(D \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}0012}{0{,}8942} \simeq 0{,}00134$$

5. (a) On répète quatre fois, de manière indépendante, une expérience de Bernoulli ou la probabilité de succès est 0,8942.
   La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et de probabilité $p = 0{,}8942$.
   La probabilité que $G = 120 - 50 = 70$ € est égale à $0{,}8942^4 \simeq 0{,}63935$.
   La probabilité que $G = 60 - 50 = 10$ € est égale à

$$\binom{4}{1} \times 0{,}8942^3 \times (1 - 0{,}8942) \simeq 0{,}302587.$$

   La probabilité que $G = -50$ € est égale à environ

$$1 - (0{,}63935 + 0{,}302587) \simeq 0{,}058063.$$

   La loi de G est donc

g_i	70	10	-50
$P(G = g_i)$	0,639	0,303	0,058

   (b) L'espérance mathématique de G est donc égale à :
   $70 \times 0{,}63935 + 10 \times 0{,}302587 - 50 \times 0{,}058063 \simeq 44{,}88$ €.
   Cela signifie qu'en moyenne on peut compter sur un bénéfice de 44,88 € par lecteur produit.