

Contrôle de mathématiques approfondies**Exercice 1**

Une communauté d'agglomération regroupe les communes d'Atout, de Boutan et de Codin. Le site internet de cette communauté d'agglomération, créé en 2006, connaît un succès grandissant.

Les habitants des trois communes peuvent, via le site internet, s'abonner à la lettre mensuelle de la communauté d'agglomération.

Monsieur S., directeur des services informatiques, demande à l'administrateur du site de lui donner des éléments qui permettront de répartir le coût d'envoi des lettres mensuelles entre les différentes communes.

Pour l'année 2013, l'administrateur du site a pu établir que, parmi les habitants des trois communes qui se connectent au site :

- 45 % habitent la ville d'Atout ;
- 20 % habitent Boutan ;
- tous les autres habitent Codin ;
- 10 % de ceux qui habitent Atout s'abonnent à la lettre mensuelle ;
- 15 % de ceux qui habitent Boutan s'abonnent à la lettre mensuelle ;
- 5 % de ceux qui habitent Codin s'abonnent à la lettre mensuelle.

On choisit au hasard un internaute d'une des trois communes qui s'est connecté en 2013.

On note :

- A l'évènement : « l'internaute habite Atout » ;
- B l'évènement : « l'internaute habite Boutan » ;
- C l'évènement : « l'internaute habite Codin » ;
- M l'évènement : « l'internaute s'abonne à la lettre mensuelle ».

On pourra s'aider d'un arbre pondéré pour répondre aux questions.

1. (a) En utilisant les données de l'énoncé, donner les valeurs des probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(M)$, $P_B(M)$ et $P_C(M)$.
(b) Déterminer la probabilité $P(C)$.
2. Quelle est la probabilité que l'internaute choisi habite Atout et s'abonne à la lettre mensuelle ?
On donnera le résultat exact sous forme décimale.
3. Quelle est la probabilité que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle ?
On donnera le résultat exact sous forme décimale.
4. Sachant que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle, quelle est la probabilité qu'il habite Atout ?
Le résultat sera arrondi au centième.
5. L'administrateur du site affirme à Monsieur S. que la commune d'Atout devra payer en 2013 plus de la moitié du coût de l'envoi des lettres mensuelles. A-t-il raison ?

Exercice 2

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième.

Une société de vente par correspondance de matériel informatique a étudié le fichier clientèle pour connaître l'utilisation du modèle A100 de disque dur externe de son catalogue.

L'enquête a porté sur 1 280 personnes ayant acheté ce modèle au cours des trois derniers mois. Les résultats concernant le sexe de l'utilisateur et l'usage personnel ou professionnel du disque dur A100 sont consignés dans le tableau ci dessous.

	Usage personnel	Usage professionnel
Homme	360	480
Femme	120	320

Un opérateur de la société est chargé d'appeler des clients au téléphone dans le but de leur proposer un nouveau produit, le disque B200.

L'opérateur choisit une personne dans le fichier de ces 1 280 personnes. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

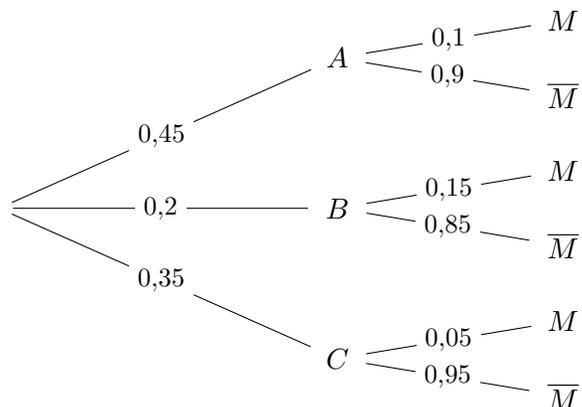
- Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?
 - Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme qui fasse un usage personnel du disque dur externe A100 ?
 - Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ou qu'elle fasse un usage personnel du disque A100 ?
 - La personne choisie est une femme. Quelle est la probabilité que cette femme fasse un usage professionnel du disque A100 ?
 - Les événements « la personne choisie est un homme qui fait un usage professionnel du disque A100 » et « la personne choisie fait un usage personnel du disque dur A100 » sont-ils indépendants ?
- On admet que, pour chaque client choisi au hasard dans le fichier des 1 280 clients ayant acheté le disque A100, l'opérateur a une probabilité égale à 0,03 d'obtenir une promesse d'achat du disque B200.

L'opérateur appelle 25 personnes choisies au hasard dans le fichier. Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces choix à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de promesses d'achat parmi les 25 personnes appelées.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
- Quelle est l'espérance de X ?
- Calculer la probabilité que l'opérateur obtienne exactement 2 promesses d'achat d'un disque B200 sur les 25 personnes appelées.
- Quelle est la probabilité que l'opérateur obtienne au moins une promesse d'achat sur les 25 personnes appelées ?
- Quelle est la probabilité que l'opérateur obtienne entre 10 et 25 promesses d'achat sur les 25 personnes appelées (10 et 25 compris) ? Interpréter le résultat obtenu.

Corrigé du contrôle de mathématiques approfondies

Exercice 1



1. (a) L'énoncé indique directement

$$P(A) = 0,45$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P_A(M) = 0,1$$

$$P_B(M) = 0,15$$

$$P_C(M) = 0,05$$

(b) $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 0,35$

2. La probabilité que l'internaute choisi habite Atout et s'abonne à la lettre mensuelle est

$$\begin{aligned} P(A \cap M) &= P(A) \times P_A(M) \\ &= 0,45 \times 0,1 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap M) = 0,045}$$

3. La probabilité que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle est

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M) \\ &= P(A) \times P_A(M) + P(B) \times P_B(M) + P(C) \times P_C(M) \\ &= 0,45 \times 0,1 + 0,2 \times 0,15 + 0,35 \times 0,05 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M) = 0,0925}$$

4. Sachant que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle, la probabilité qu'il habite Atout est

$$\begin{aligned} P_M(A) &= \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \\ &= \frac{0,045}{0,0925} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_M(A) \simeq 0,49}$$

5. L'administrateur du site affirme à Monsieur S. que la commune d'Atout devra payer en 2013 plus de la moitié du coût de l'envoi des lettres mensuelles. Il a tort car $0,49 < 0,50$.

Exercice 2

	Usage personnel	Usage professionnel
Homme	360	480
Femme	120	320

1. (a) La probabilité que cette personne choisie soit une femme est

$$\frac{120 + 320}{1280} = \frac{11}{32} \simeq \boxed{0,344}$$

- (b) La probabilité que cette personne soit un homme qui fasse un usage personnel du disque dur externe A100 est

$$\frac{360}{1280} = \frac{9}{32} \simeq \boxed{0,281}$$

- (c) La probabilité que cette personne soit un homme ou qu'elle fasse un usage personnel du disque A100 est

$$\frac{360 + 480 + 120}{1280} = \frac{3}{4} = \boxed{0,75}$$

- (d) La personne choisie est une femme. La probabilité que cette femme fasse un usage professionnel du disque dur externe A100 est

$$\frac{320}{120 + 320} = \frac{8}{11} \simeq \boxed{0,727}$$

- (e) Les évènements A (« la personne choisie est un homme qui fait un usage professionnel du disque A100 ») et B (« la personne choisie fait un usage personnel du disque dur A100 ») ne sont pas indépendants car

$$\underbrace{P(A)}_{\frac{480}{1280}} \times \underbrace{P(B)}_{\frac{480}{1280}} \neq \underbrace{P(A \cap B)}_0$$

2. (a) On répète 25 fois, de manière indépendante, l'expérience de Bernoulli (à deux issues : promesse d'achat - pas de promesse). Le nombre de succès (de promesses) X suit donc une loi binomiale de paramètres 25 et 0,03.

- (b) L'espérance de X vaut

$$E(X) = 25 \times 0,03 = \boxed{0,75}$$

- (c) La probabilité que l'opérateur obtienne exactement 2 promesses d'achat d'un disque B200 sur les 25 personnes appelées est

$$P(X = 2) \simeq \boxed{0,134}$$

- (d) La probabilité que l'opérateur obtienne au moins une promesse d'achat sur les 25 personnes appelées est

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,97^{25} \simeq \boxed{0,533}$$

- (e) La probabilité que l'opérateur obtienne entre 10 et 25 promesses est :

$$P(10 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 9) \simeq 1,27 \times 10^{-9} \simeq \boxed{0}$$

Il n'y a quasiment aucune chance d'obtenir entre 10 et 25 promesses d'achat (une chance sur un milliard).