1SIO 9 décembre 2021

Contrôle de mathématiques approfondies

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations :

- $3x^2 - 2x + 7 = 0$
- $-x^2 + 3x + 50 = 0$
- $x^2 - 12x = 0$
- $5x^2 + x - 1 > 0$
- $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0$

Exercice 2

En incrustant des particules de plomb dans certaines des alvéoles creusées sur les faces d'un dé ordinaire, on modifie la position de son centre de gravité. On dit alors que le dé est pipé. Le tableau ci-dessous indique la quasi-totalité des probabilités p_i d'obtenir le numéro i sur la face supérieure d'un dé pipé (par exemple, la probabilité d'obtenir la face 6 est égale à 0,3).

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,1	p_3	0,14	0,26	0,3

1. Prouver que p_3 vaut 0,15.
2. Soit A l'événement : « Obtenir un numéro supérieur ou égal à 3 » et soit B l'événement : « Obtenir un numéro strictement inférieur à 5 ».
   Calculer les probabilités : p(A), p(B), p($\overline{A}$), p($\overline{B}$), p($A \cup B$), p($A \cap B$), p($A \cup \overline{B}$), p($\overline{A} \cap \overline{B}$).

Exercice 3

Un professeur d'éducation sportive s'adresse aux 30 élèves d'une de ses classes au sujet de l'intérêt qu'ils portent au sport en général. Parmi les 30 élèves, 20 lisent la rubrique sportive d'un journal, 14 pratiquent un sport et 8 font les deux.
On choisit un élève au hasard dans la classe.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il ne s'intéresse pas au sport ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il lise une rubrique sportive sans pratiquer un sport ?

Exercice 4

La porte d'entrée d'un immeuble est munie d'un clavier de trois touches marquées par les lettres A,B et C.
Le code qui déclenche l'ouverture de la porte est formé d'une série de deux lettres distinctes ou non.

1. Déterminer le nombre de codes différents possibles.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants.
   A : Le code se termine par A.
   B : Le code est formé de deux lettres différentes.
   C : Le code comporte au moins une fois la lettre A.

Exercice 5

Déterminer des réels a, b et c tels que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points de coordonnées $(0;2)$, $(-1;0)$ et $(7;0)$.

Corrigé du contrôle de mathématiques approfondies

Exercice 1

- $3x^2 - 2x + 7 = 0$
  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -80 < 0$ donc l'équation n'admet $\boxed{\text{pas de solution}}$.
- $-x^2 + 3x + 50 = 0$ $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 50 = 209 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{-3 - \sqrt{209}}{-2} \approx 8{,}73 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{209}}{-2} \approx -5{,}73}$$

- $x^2 - 12x = 0$ s'écrit

$$x(x - 12) = 0$$

  Les deux solutions sont $\boxed{0 \text{ et } 12}$.

  (on peut aussi calculer $\Delta = 144 \ldots$)
- $5x^2 + x - 1 > 0$
  $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 21 > 0$ donc le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{10} \approx -0{,}56 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{10} \approx 0{,}36$$

  $5x^2 + x - 1$ est du signe de 5 sauf entre les racines.
  La solution de l'inéquation est donc $\boxed{]-\infty\ ;\ x_1[\ \cup\ ]x_2\ ;\ +\infty[}$.
- $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0$ s'écrit

$$(x + 2)^2 \leqslant 0$$

  Un carré est positif pour tout x. La seule solution de l'inéquation est la valeur de x qui annule $(x + 2)$; c'est $\boxed{-2}$.

Exercice 2

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,1	p_3	0,14	0,26	0,3

1. La somme des six probabilités doit être égale à 1 donc

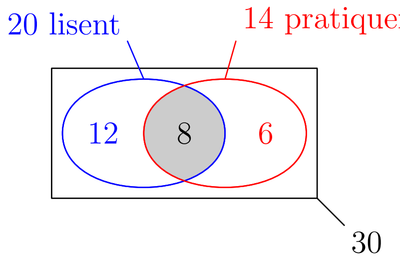
$$p_3 = 1 - (0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}14 + 0{,}26 + 0{,}3)$$
$$\boxed{p_3 = 0{,}15}$$

2. On note
   A l'événement : « Obtenir un numéro supérieur ou égal à 3 »
   B l'événement : « Obtenir un numéro strictement inférieur à 5 ».
   - $P(A) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6$; $\boxed{P(A) = 0{,}85}$
   - $P(B) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$; $\boxed{P(B) = 0{,}44}$
   - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $\boxed{P(\overline{A}) = 0{,}15}$

- $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$; $\boxed{P(\overline{B}) = 0{,}56}$
- $\boxed{P(A \cup B) = 1}$
- $P(A \cap B) = p_3 + p_4$; $\boxed{P(A \cap B) = 0{,}29}$
- $P(A \cup \overline{B}) = P(A)$; $\boxed{P(A \cup \overline{B}) = 0{,}85}$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$; $\boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0}$

Exercice 3

1. $12 + 8 + 6 = 26$ s'intéressent au sport, donc $30 - 26 = 4$ non.



La probabilité pour qu'un élève ne s'intéresse pas au sport est $\boxed{\dfrac{4}{30}}$.

2. La probabilité pour qu'il lise une rubrique sportive sans pratiquer un sport est $\boxed{\dfrac{12}{30}}$.

Exercice 4

La porte d'entrée d'un immeuble est munie d'un clavier de trois touches marquées par les lettres A,B et C.

1. Les $\boxed{9}$ codes de deux lettres différents possibles sont :

   AA, AB, AC

   BA, BB, BC

   CA, CB, CC

2. — La probabilité que le code se termine par A est $\boxed{P(A) = \dfrac{3}{9}}$ car $A = \{AA,BA,CA\}$.

   — La probabilité que le code soit formé de deux lettres différentes est $\boxed{P(B) = \dfrac{6}{9}}$ car $B = \{AB,AC,BA,BC,CA,CB\}$.

   — La probabilité que le code comporte au moins une fois la lettre A est $\boxed{P(C) = \dfrac{5}{9}}$ car $C = \{AA; AB,AC,BA,CA\}$.

Exercice 5

Déterminons des réels a, b et c tels que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points de coordonnées $(0; 2)$, $(-1; 0)$ et $(7; 0)$.

$$f(x) = -\frac{2}{7}(x+1)(x-7) = \frac{-2}{7}x^2 + \frac{12}{7}x + 2$$