1SIO 25 novembre 2021

Contrôle de mathématiques approfondies

Exercice 1

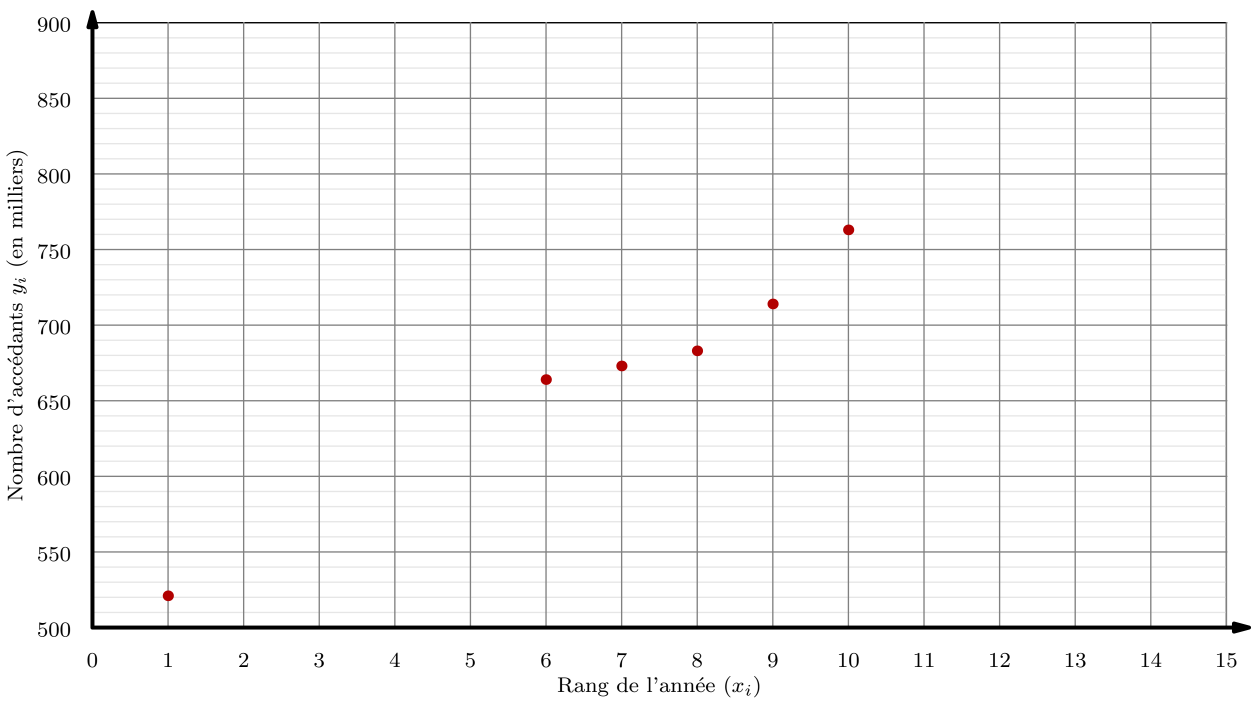
En France, l'augmentation des prix de l'immobilier résidentiel n'a pas empêché la progression du nombre de nouveaux accédants à la propriété pendant 10 ans, comme l'atteste le tableau ci-dessous :

Accession à la propriété en France de 1996 à 2005 :

Année	1996	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année (x_i)	1	6	7	8	9	10
Nombre d'accédants en milliers (y_i)	521	664	673	683	714	763

(source : OFL - 4^{e} trimestre 2001)

1. On a représenté le nuage des points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ associé au tableau statistique dans le repère orthogonal ci-dessous.
2. On recherche un ajustement affine de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   (a) Déterminer sans justification les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer ce point sur le graphique.
   (b) Donner sans justification une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au *centième*.
   (c) Combien vaut le coefficient de corrélation linéaire r ? Qu'indique-t-il ?
   (d) On prend par la suite $y = 25{,}2x + 497{,}6$ pour l'équation de la droite d'ajustement. Tracer cette droite dans le repère ci-dessous.
   (e) On suppose que l'évolution du nombre de nouveaux accédants à la propriété se poursuit selon le modèle donné par la droite d'ajustement obtenue à la question précédente. Déterminer une estimation, en milliers, du nombre de nouveaux accédants à la propriété en 2010.



Exercice 2

Déterminer les solutions de

$$x^2 \leqslant 10 \qquad ; \qquad x^2 > 16 \qquad ; \qquad \frac{1}{x} \geqslant -3 \qquad ; \qquad \sqrt{x} < 5$$

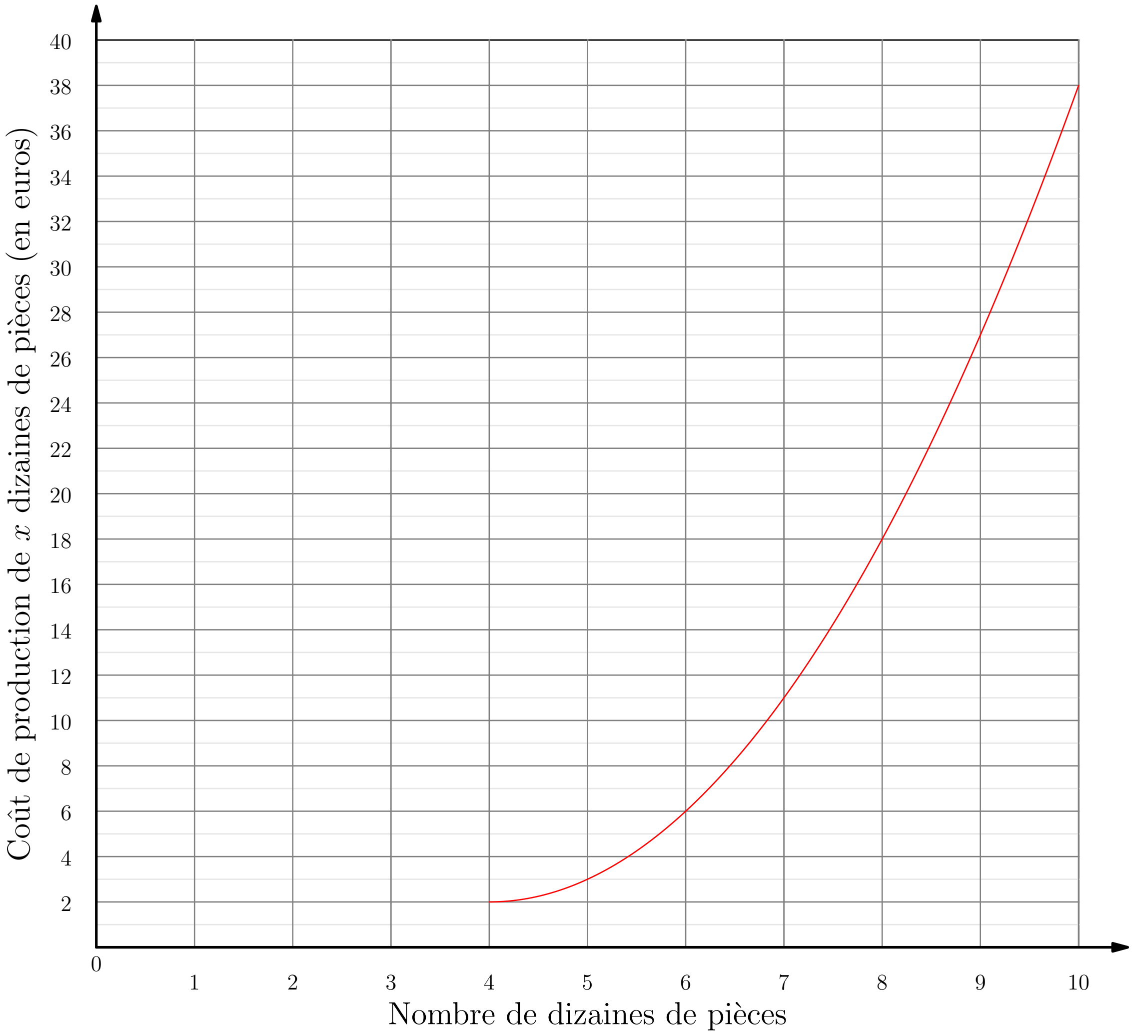
On ne demande pas de justification.

Exercice 3

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques.
On note x le nombre de **dizaines** de pièces fabriquées au cours d'une journée.
Le coût de production, en euros, de x **dizaines** de pièces est noté $f(x)$. La partie de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,10]$ est donnée dans le repère de ci-dessous.

1. **Lecture graphique**
   On laissera apparents, sur le graphique (à rendre avec la copie), les traits nécessaires à la lecture graphique.
   (a) À l'aide du graphique, déterminer le coût de production de 50 pièces.
   (b) Chaque pièce est vendue 0,3 €. On note $R(x)$ la recette de l'entreprise lorsqu'elle produit x dizaines de pièces. Expliquer pourquoi $R(x) = 3x$.
   (c) Représenter graphiquement la fonction R dans le même repère.
   (d) Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de dizaines de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production. On note $B(x)$ ce bénéfice. À l'aide du graphique, déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

2. **Étude du bénéfice**
   On suppose que la fonction f est définie par : $f(x) = x^2 - 8x + 18$ sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.
   (a) On rappelle que lorsque l'entreprise produit x dizaines de pièces, sa recette est $R(x) = 3x$.
   Vérifier que le bénéfice de l'entreprise est alors $B(x) = -x^2 + 11x - 18$.
   (b) Résoudre l'équation
   $$-x^2 + 11x - 18 = 0.$$
   Que représentent la (ou les solutions) pour l'entreprise ?
   (c) Résoudre, dans l'intervalle $[4\,;\,10]$, l'inéquation
   $$-x^2 + 11x - 18 < 0.$$
   Que représentent les solutions pour l'entreprise ?
   (d) Donner, dans un tableau, les variations de B sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.
   (e) Déterminer alors le nombre de pièces que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice maximum. Quel est ce bénéfice maximum ?

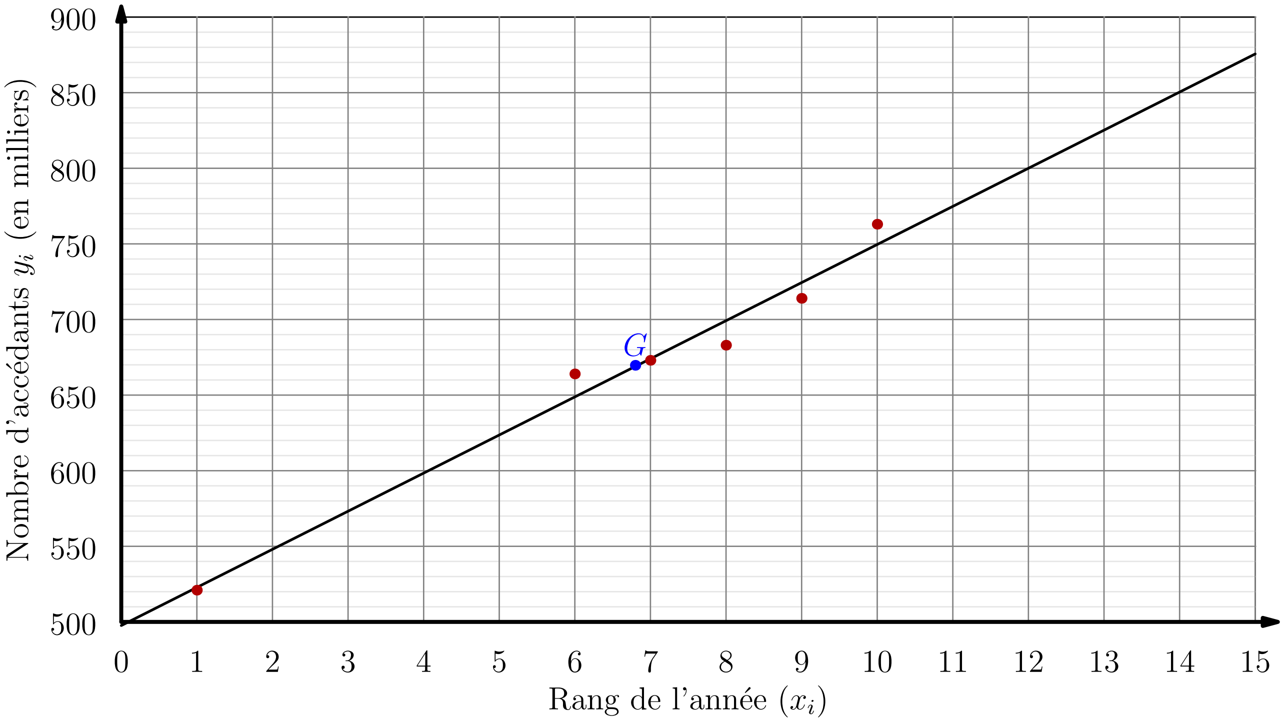


Coût de production de x dizaines de pièces (en euros)
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Nombre de dizaines de pièces

Corrigé du contrôle de mathématiques approfondies

Exercice 1

1. Nuage des points.



2. (a) Le point moyen G de ce nuage a pour coordonnées $(\overline{x};\overline{y})$ soit environ : $\boxed{G(6{,}8\ ;\ 669{,}7)}$.

   (b) Une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est (au centième près)

$$\boxed{y = 25{,}17x + 497{,}65}$$

   (c) Le coefficient de corrélation r vaut : $\boxed{r \approx 0{,}988}$. Il est très proche de 1 : les points sont sans doute bien alignés et un ajustement affine est sans doute approprié.

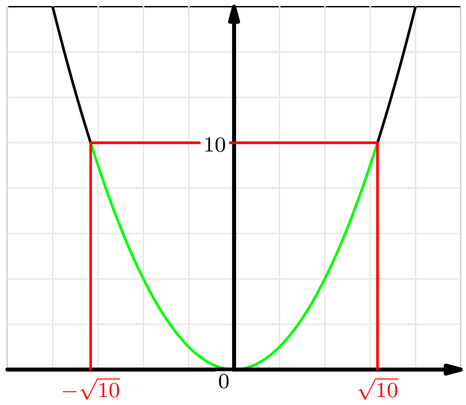
   (d) On prend par la suite $y = 25{,}2x + 497{,}6$. Tracé de cette droite.

   (e) En 2010, pour $x = 15$ on peut estimer à l'aide de ce modèle le nombre de nouveaux accédants à la propriété à

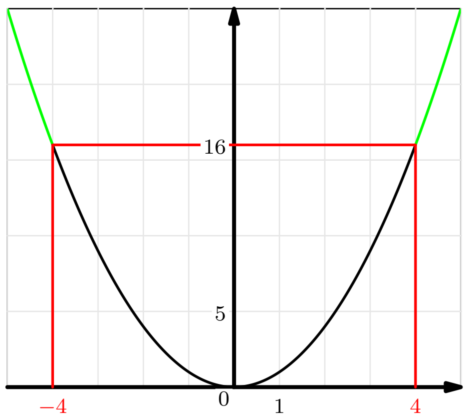
$$25{,}2 \times 15 + 497{,}6 = \boxed{875{,}6} \text{ milliers}$$

Exercice 2

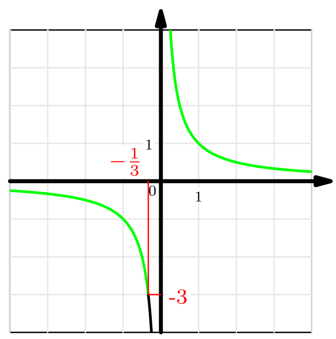
$x^2 \leqslant 10$ a pour solution $\boxed{[-\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{10}]}$.



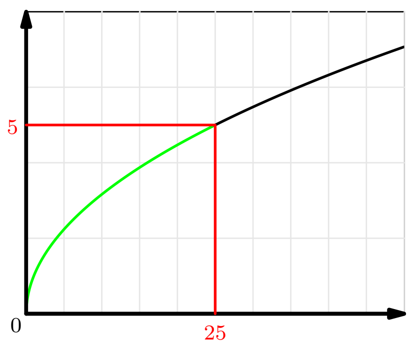
$x^2 > 16$ a pour solution $\boxed{]-\infty\ ;\ -4[\cup]4\ ;\ +\infty[}$.



$\dfrac{1}{x} \geqslant -3$ a pour solution $\boxed{\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right] \cup]0\ ;\ +\infty[}$



$\sqrt{x} < 5$ a pour solution $\boxed{[0\ ;\ 25[}$.



Exercice 3

1. **Lecture graphique**

   (a) À l'aide du graphique, le coût de production de 50 pièces est de 3 €.

   (b) Chaque pièce est vendue 0,3 €. On note $R(x)$ la recette de l'entreprise lorsqu'elle produit x dizaines de pièces. Chaque pièce étant vendue 0,3 €, la dizaine est donc vendue 3 €. La vente de x dizaines rapporte alors $3x$ €.
   Nous obtenons bien $R(x) = 3x$.

   (c) La représentation graphique de la fonction R est un segment dont les extrémités sont les points de coordonnées $(4\,;\,12)$ et $(10\,;\,30)$.

   (d) Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de dizaines de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production. On note $B(x)$ ce bénéfice. À l'aide du graphique, déterminons à quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
   L'entreprise réalise un bénéfice positif si les recettes sont supérieures aux coûts.
   Ceci est réalisé lorsque la courbe des coûts est en-dessous de la courbe des recettes ou lorsqu'elles se coupent, nous obtenons donc $[4\,;\,9]$.

2. **Étude du bénéfice**

   La fonction f est définie par : $f(x) = x^2 - 8x + 18$ sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.

   (a) Vérifions que le bénéfice de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 11x - 18$.

   $$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - f(x) \\ &= 3x - (x^2 - 8x + 18) \\ &= -x^2 + 11x - 18 \end{aligned}$$

   (b) Résolvons l'équation $-x^2 + 11x - 18 = 0$.
   C'est une équation du second degré. Le discriminant vaut

   $$\Delta = 11^2 - 4(-1)(-18) = 49$$

   Dans $\mathbb{R}$, l'équation a deux solutions :

   $$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{49}}{-2} = 9 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{49}}{-2} = 2$$

   Dans ce problème, la seule solution dans $[4\ ;\ 10]$ est $\boxed{9}$.
   Si l'entreprise fabrique 9 dizaines de pièces, son bénéfice est nul.

   (c) Résolvons l'inéquation $-x^2 + 11x - 18 < 0$.
   C'est une inéquation du second degré. D'après la question précédente, comme $a = -1$ est négatif, elle a pour solution la réunion des intervalles

   $$]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[.$$

   Dans $[4\ ;\ 10]$, l'intervalle des solutions est $\boxed{]9\ ;\ 10]}$.
   Si l'entreprise fabrique entre 9 et 10 dizaines de pièces, son bénéfice est négatif (elle perd de l'argent).

(d) Variations de B : cette fonction du second degré change de variations à $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-11}{-2} = 5{,}5$. Comme $a = -1$ est négatif, elle est croissante avant 5,5 et décroissante ensuite.

x	4	5,5	10
B	10 ↗	12,25	↘ -8

(e) Pour réaliser un bénéfice maximum, l'entreprise doit donc fabriquer 5,5 dizaines de pièces, par conséquent elle doit produire 55 pièces.