BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

Épreuve EF2

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

25 avril 2022

CORRIGÉ

Exercice 1 **7 points**

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :

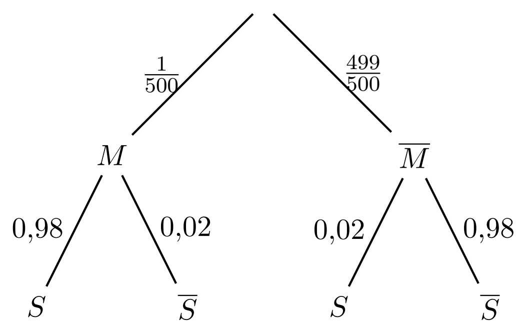
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

1. D'après l'énoncé, $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}98$.
2. Arbre pondéré :



3. La probabilité que le voyageur porte un objet métallique et fasse sonner le portique vaut :

$$P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S)$$
$$P(M \cap S) = \frac{1}{500} \times 0{,}98$$
$$\boxed{P(M \cap S) = 0{,}00196}$$

4. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(S \cap M) + P\left(S \cap \overline{M}\right)$$
$$P(S) = P(M) \times P_M(S) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(S)$$
$$P(S) = 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02$$
$$\boxed{P(S) = 0{,}021\,92}$$

5. $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(M) \times P_M(S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}002 \times 0{,}98}{0{,}02192} \simeq \boxed{0{,}089}$
6. S et M ne sont pas indépendants car

$$\underbrace{P(M \cap S)}_{0{,}002 \times 0{,}98} \neq \underbrace{P(M)}_{0{,}002} \times \underbrace{P(S)}_{0{,}2192}$$

7. On considère à présent un groupe de 100 voyageurs indépendants qui franchissent le portique. Pour chacun, la probabilité de faire sonner le portique est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le portique a sonné pour ce groupe.
   (a) On répète 100 fois, de manière indépendante l'expérience de Bernoulli à deux issues : le portique sonne ou pas. Le nombre X de fois où le portique sonne suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$..
   (b) La probabilité que 4 voyageurs exactement fassent sonner le portique est :
   $$\boxed{P(X = 4) \approx 0{,}090}$$
   (c) La probabilité que le portique sonne entre 4 et 10 fois (4 et 10 compris) est
   $$\boxed{P(4 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0{,}141}$$
   NB : sur beaucoup de calculatrices, il faut utiliser le menu de cumul et penser à : $P(4 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 3)$.

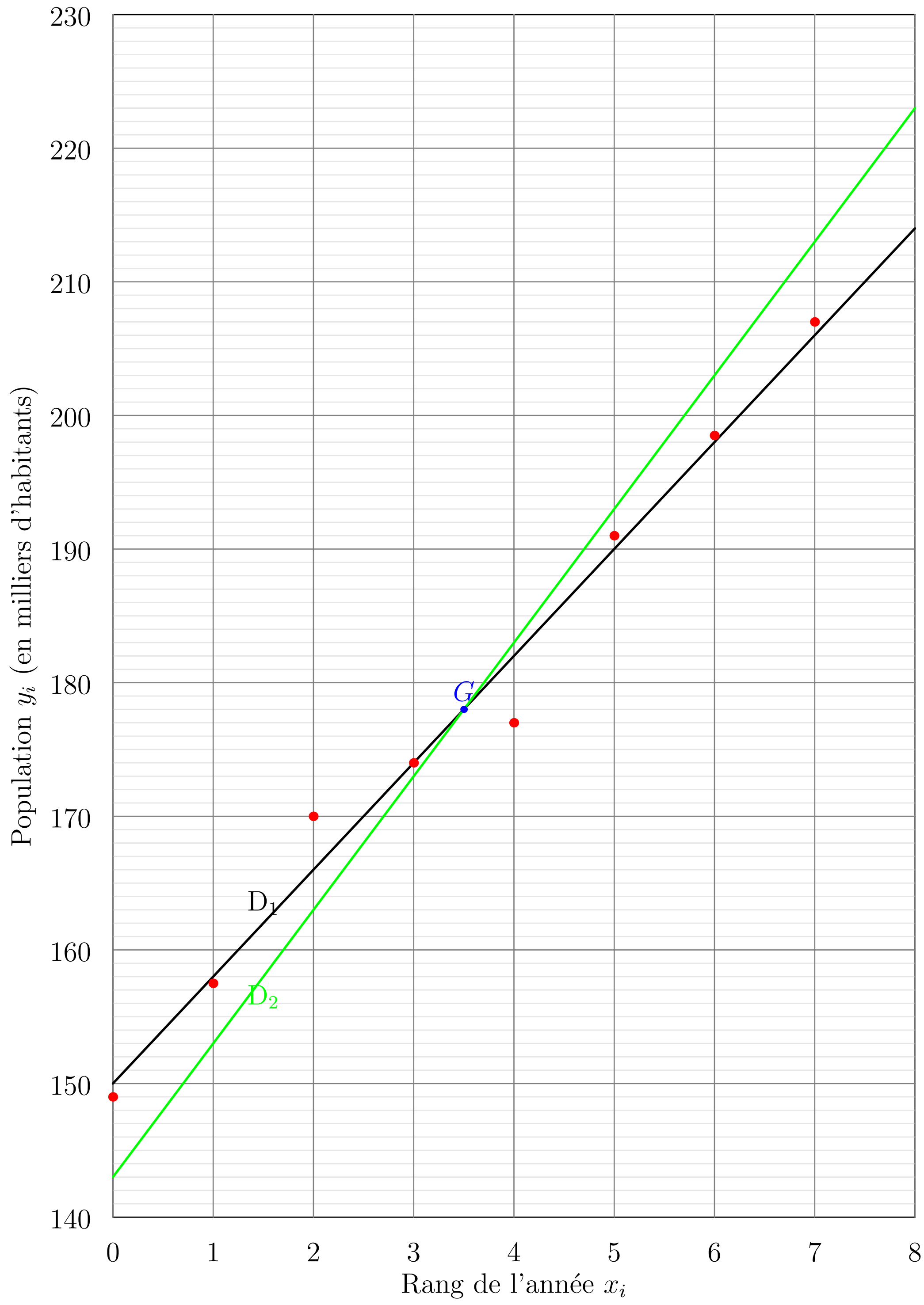
Exercice 2 — 6 points

Partie A

Le tableau suivant donne l'évolution de la population d'une ville A de 1985 à 2020 :

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Population y_i (en milliers d'habitants)	149	157,5	170	174	177	191	198,5	207

1. Nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$



2. Le point moyen G a pour coordonnées $(\overline{x},\overline{y})$: $\boxed{G(3{,}5\ ;\ 178)}$
3. Construction de la droite D_1 d'équation $y = 8x + 150$ et de la droite D_2 d'équation $y = 10x + 143$.

   $G(3{,}5\ ;\ 178)$ est bien sur D_1 car

   $$8 \times 3{,}5 + 150 = 178$$

   et sur D_2 car

   $$10 \times 3{,}5 + 143 = 178.$$

4. D_1 ajuste au mieux le nuage de points : seuls deux points en sont un peu éloignés tandis que la majorité des points du nuage est loin de D_2.

Avec D_1, on peut prévoir pour l'année 2025 une population de

$$8 \times 8 + 150 = \boxed{214 \text{ milliers d'habitants}}$$

Partie B

Tous les 5 ans, on effectue un relevé de la population d'une ville B. En 1995, ce relevé a donné 125 milliers d'habitants ; les relevés suivants montrent une augmentation régulière de 3 %.

Soit R_n, la valeur (en milliers d'habitants) du relevé de rang n ($R_0 = 125$ en 1995, R_1 relevé en 2000 etc.).

1.

$$R_1 = R_0 \times 1{,}03 \qquad \boxed{R_1 = 128{,}75}$$
$$R_2 = R_1 \times 1{,}03 \qquad \boxed{R_2 \approx 132{,}6}$$
$$R_3 = R_2 \times 1{,}03 \qquad \boxed{R_3 \approx 136{,}6}$$

2. Pour tout n, $\boxed{R_{n+1} = 1{,}03 R_n}$.

   La suite (R_n) est géométrique, de raison 1,03 et de premier terme $R_0 = 125$.
3. Pour tout n, $\boxed{R_n = 125 \times 1{,}03^n}$.
4. Si cette évolution se poursuit, on peut prévoir pour l'an 2025 une population de

$$125 \times 1{,}03^6 \approx \boxed{149{,}3 \text{ milliers d'habitants.}}$$

5. La population dépasse 163 milliers d'habitants pour $\boxed{n = 9}$, soit en $\boxed{2040}$.

   Méthode 1 : on essaie à la calculatrice des valeurs de n, en sachant que la suite est croissante (car $1{,}03 > 1$). On observe que

$$125 \times 1{,}03^8 \approx 158{,}3 < 163$$
$$125 \times 1{,}03^9 \approx 163{,}1 > 163$$

   Méthode 2 : on résout l'inéquation $125 \times 1{,}03^n > 163$ qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 1{,}03^n &> \frac{163}{125} \\ \ln\left(1{,}03^n\right) &> \ln\left(\frac{163}{125}\right) \\ n \ln(1{,}03) &> \ln(1{,}304) \\ n &> \frac{\ln(1{,}304)}{\ln(1{,}03)} \approx 8{,}98 \end{aligned}$$

Exercice 3 — 7 points

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121, \quad x \text{ étant compris entre 1 et 30.}$$

Le coût moyen (en €) de production d'un objet est donné par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ où x appartient à $[1\,;\,30]$.

1. Pour tout x de $[1\,;\,30]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{C(x)}{x} \\ &= \frac{x^2 + 60x + 121}{x} \\ &= \frac{x^2}{x} + \frac{60x}{x} + \frac{121}{x} \\ f(x) &= x + 60 + \frac{121}{x} \end{aligned}$$

2. La fonction dérivée de f est définie pour tout x de $[1\,;\,30]$ par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 0 - \frac{121}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 121}{x^2} \\ & \frac{(x-11)(x+11)}{x^2} \end{aligned}$$

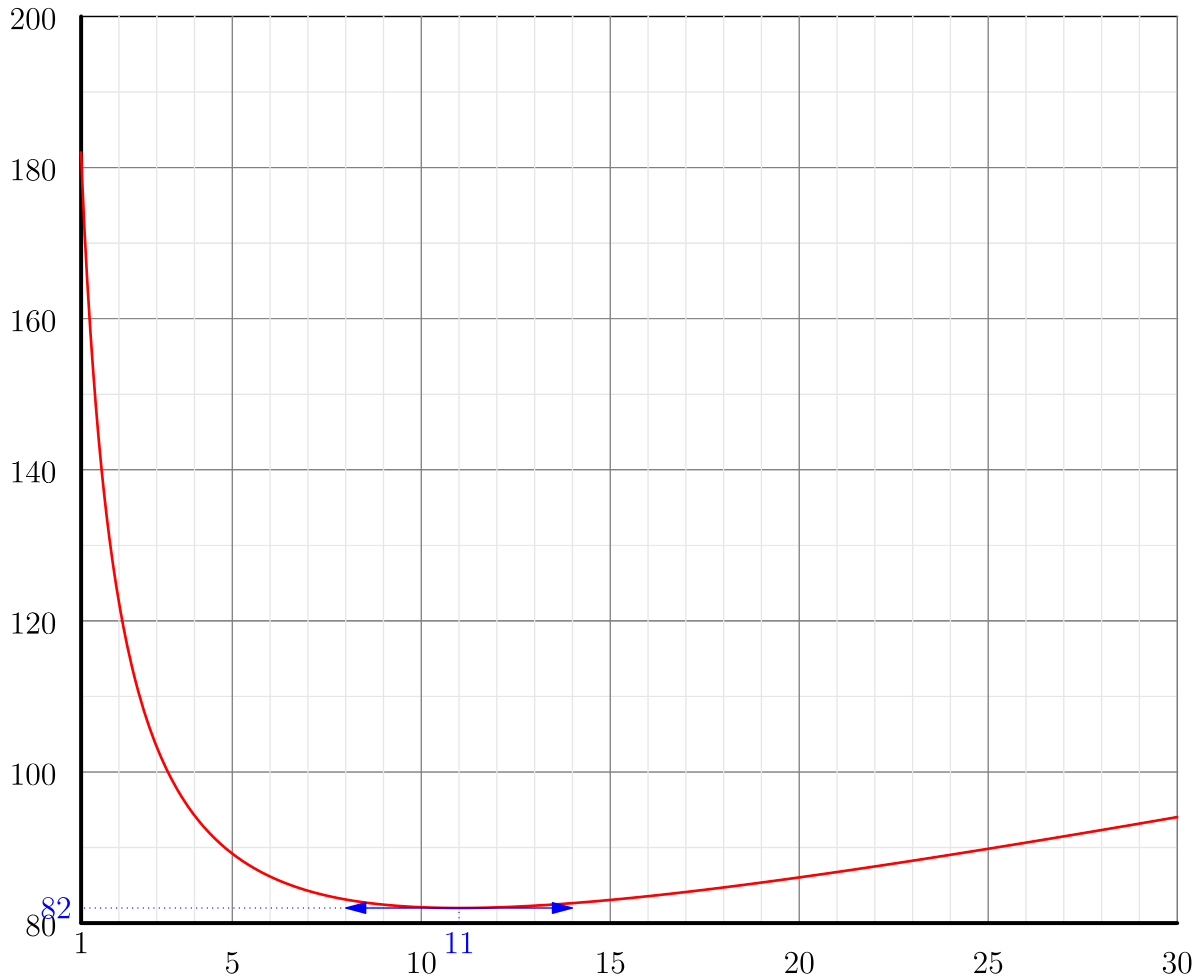
3. Le dénominateur de $f'(x)$ est un carré, strictement positif sur $[1\,;\,30]$.
   Son numérateur $1x^2 - 121$ est un polynôme du second degré, qui est du signe de 1 sauf entre les racines -11 et 11.
   D'où le tableau des variations de f sur l'intervalle $[1\,;\,30]$:

x	1		11		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	182	↘	82	↗	

4. Tableau de valeurs :

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$	182	122,5	94,25	83,1	82	83,1	86,05	89,8	94,0

5. Courbe représentative de f.



Partie B

L'artisan vend chaque objet 110€.

1. Pour x dans $[1\,;30]$, le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$\begin{aligned} B(x) &= \underbrace{110x}_{\text{recette}} - \underbrace{C(x)}_{\text{coût}} \\ &= 110x - (x^2 + 60x + 121 \\ &= 110x - x^2 - 60x - 121 \\ B(x) &= -x^2 + 50x - 121 \end{aligned}$$

2. $B'(x) = -2x + 50$ change de signe à 25 (positif avant et négatif après).
3. Tableau de variations de B :

x	1		25		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	-72	$\nearrow$	504	$\searrow$	479

Le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour faire un bénéfice maximal est donc $\boxed{25}$. Le bénéfice maximal. est alors de $\boxed{504 \text{ €}}$.

4. Résolvons $B(x) \geqslant 0$, soit

$$-x^2 + 50x - 121 \geqslant 0$$

Ce polynôme de degré deux est du signe de -1 sauf entre ses racines

$$x_1 = \frac{-50 + \sqrt{2016}}{-2} \approx 2{,}55 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-50 - \sqrt{2016}}{-2} \approx 47{,}45.$$

$B(x)$ est donc positif entre 3 et 30 objets.

Pour obtenir un bénéfice positif, le nombre d'objets à fabriquer et à vendre doit se trouver $\boxed{\text{entre 3 et 30 objets}}$.